

Глава 1. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

Постановка задачи:

Дана СЛАУ с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = f_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = f_n \end{cases} \quad (1)$$

В сокращённой форме:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Введём матрицу A размерности $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

получим матричную форму записи

$$A \vec{x} = \vec{f},$$

$$\text{где } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad \vec{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$$

Будем рассматривать невырожденные системы:

$$\Delta = \det A \neq 0,$$

т.е., системы имеют и единственное решение.

Требуется найти это решение при заданных A и $\vec{f}$.

§1. Прямые методы

Опр. Прямыми методами наз-ся методы, позволяющие получить точное решение невырожденной системы (1), за конечное число действий.

П.1. Правило Крамера

Система

$$1) \Delta = \det A$$

$$2) A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & f_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & f_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$3) \Delta_j = \det A_j, \quad j = \overline{1, n}$$

Получим $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}$

Недостаток: Больший объём вычислений, не позволяющий использовать правило Крамера на практике

Оценка кол-ва действий в правиле Крамера

$$\Delta, \Delta_j \quad j = \overline{1, \dots, n} \quad (n \times n)$$

1 строг. $\sum_{i=1}^n a_{ij}$ $\xrightarrow{n}$ кол-во сумм $n!$

$(n-1)$ умнож. $n!$

$n!$ ~~сложение~~ слагаемых

$$\Rightarrow \text{кол-во действий: } n! + n!(n-1) = n \cdot n!$$

$$\Rightarrow \text{где подсчёта } (n+1) \text{ стр} \Rightarrow \text{нужно } n \cdot (n+1)!$$

Ф-ла Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \gg 1$$

$$n=20: \text{ сист } 20 \times 20$$

$$n \cdot (n+1)! \sim 10^{20}$$

$$\text{Средний суперкомпьютер} = 10^7 \text{ флос} \approx 10^{13} \text{ флос}$$

$$\text{Требуется: } 10^7 \text{ сек } (10^{20}/10^{13})$$

$$\text{в сутках} \sim 100000 = 10^5 (86000)$$

$$10^7 \text{ сек} \sim 10^2 \text{ суток} = 100 \text{ суток} \sim 3 \text{ месяца}$$

$$10^6 \times 10^6 \rightarrow \boxed{\times}$$

17.2 § Метод Гаусса

Метод Гаусса основан на приведении системы уравнений к системе с верх. матрицей

Метод можно представить в виде двух этапов. Первый этап (прямой ход) - приведение матрицы к верх. виду. Второй этап (обратный ход) - последовательное отыскание неизвестных $x_1, \dots, x_n$

Прямой ход

Дана система с матрицей $A = \{a_{ij}\}$

1) Пусть (не ограничивая общности) $a_{11} \neq 0$ - это ведущий эл-т первого ряда (если $a_{11} = 0$, поменяем местами ур-ние с номером 1 и i , при котором $a_{i1} \neq 0$; поскольку $\Delta \neq 0$, то такое i найдётся)

2) Разделим все члены первого ур-ния на a_{11} и обозначим новые коэффициенты:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = 2, \dots, n$$

$$y_1 = \frac{f_1}{a_{11}}$$

Заметим, что $a_{11} = 1$:

Первое ур-ние системы имеет вид:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = y_1 \quad (*)$$

3) Из каждого i -го ур-ния ($i = 2, \dots, n$) вычтем ур-ние $(*)$, умноженное на a_{i1} , тем самым исключив x_1 из всех уравнений, кроме первого.

Главным след. след-ств:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n = y_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = f_n^{(1)} \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot \frac{a_{1j}}{a_{11}}$, $j = \overline{2, n}$
 $i = \overline{2, n}$
 $f_i^{(1)} = f_i - a_{i1} \cdot \frac{f_1}{a_{11}}$

4) Естественно, выйдя из n -ой системы

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = f_n^{(1)} \end{cases}$$

и вернёмся к 1) $\Rightarrow$ повторим процедуру

5) на $(n-1)$ -ой новой системе

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n = y_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n = y_2 \\ x_3 + \dots + c_{3n}x_n = y_3 \\ \dots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

или, в матричном виде

$$C \vec{x} = \vec{y},$$

где $C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ & & 1 & \dots & c_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 & c_{n-1,n} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

На этом прямой ход метода Гаусса заканчивается

Обратный ход

Обратный ход состоит в нахождении неизвестных.

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_{n-1} = y_{n-1} - c_{n-1,n}x_n \\ x_{n-2} = y_{n-2} - c_{n-2,n-1}x_{n-1} - c_{n-2,n}x_n \\ \dots \\ x_1 = y_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - \dots - c_{1n}x_n \end{cases}$$

Оценка количества операций в методе Гаусса

1) Первый шаг прямого хода:

n элементов и $n(n-1)$ сложений и умножений

2) Q_1 - элементы:

$$Q_1 = \overset{\text{первый шаг}}{n} + \overset{\text{второй}}{(n-1)} + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$$

Q_2 - сложений и умножений

$$Q_2 = n(n-1) + (n-1)(n-2) + \dots + 2 \cdot 1 = \frac{n(n^2-1)}{3} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

3) Обратный ход:

$$Q_3 = 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) = O(n^2)$$

$$Q = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{Q_1} + \underbrace{\frac{n^3}{3} + O(n^2)}_{Q_2} + \underbrace{n(n+1)}_{Q_3} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

$$n=20: \frac{8 \cdot 1000}{3} \approx 2666 \text{ операций.}$$

М. Гаусса > Крамера

$$n=10^6 \Rightarrow 10^9$$

П.3. Метод Гаусса с выбором максимума элемента.

Обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_{n-1} = y_{n-1} - C_{n-1,n} x_n \end{cases}$$

$$x_1 = y_1 - C_{12} x_2 - C_{13} x_3 - \dots - C_{1n} x_n$$

Пусть x_k - точное значение решения, $k=1, \dots, n$

$\tilde{x}_k = x_k + \delta_k$ - значения с погрешностью вычисления, $k=1, \dots, n$.

$$k=n: \tilde{x}_n = x_n + \delta_n$$

$$\begin{aligned} k=n-1: \tilde{x}_{n-1} &= y_{n-1} - C_{n-1,n} \tilde{x}_n = y_{n-1} - C_{n-1,n} (x_n + \delta_n) = \\ &= \underbrace{y_{n-1} - C_{n-1,n} x_n}_{x_{n-1}} - \underbrace{C_{n-1,n} \delta_n}_{\delta_{n-1}} = x_{n-1} + \delta_{n-1} \end{aligned}$$

$$|\delta_{n-1}| = |c_{n-1,n}| |\delta_n|$$

Если $|c_{n-1,n}| > 1 \Rightarrow |\delta_{n-1}| > |\delta_n|$ - рост ошибки?

Если $|c_{n-1,n}| < 1 \Rightarrow |\delta_{n-1}| < |\delta_n|$ - убывание

• Таким образом, метод Гаусса можно модифицировать след. образом:

На каждом ходе метода (т.е. на стадии приведения матрицы к трекр. виду):

Первый шаг: при $i=1$ выбираем среди всех a_{ij} , $j=\overline{1,n}$ максимальный по модулю $\max_j |a_{ij}| = |a_{ij_1}|$

Поменяем местами столбцы первый и j_1 , изменив при этом нумерацию переменных.

После "ведущим" эл-том станет $\tilde{a}_{11} = a_{j_1 1}$ - максимальный по модулю $\Rightarrow$

$$\tilde{c}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij}}{\tilde{a}_{11}} : |\tilde{c}_{ij}| \leq 1.$$

Аналогично поступаем и на остальных шагах: все эл-ты $\tilde{c}_{ij}$ будут по модулю меньше или равны 1.

Это и есть метод Гаусса с выбором главного эл-та (по строке).

17.4. Системы с диагональным преобладанием

Опр.: Назовём систему $Ax = F$ с матрицей $A = \{a_{ij}\}$ системой с диагональным преобладанием, если: $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, $i = \overline{1, n}$

Теорема: Система с диаг. преобладанием всегда имеет и единственное решение.

• Δ n -им $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0$, $i = \overline{1, n}$ - однородную систему. Пусть $\exists$ нетривиальное решение этой системы: $x_1, \dots, x_n \Rightarrow \max_i |x_i| = |x_k| \neq 0$.

Запишем k -ое уравнение системы:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = 0 \Leftrightarrow a_{kk} x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} x_j.$$

Тогда $|a_{kk} x_k| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} x_j \right| \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right) |x_k|$

$$\Rightarrow |a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \text{ - противоречие диаг. преобладания}$$

Вывод: Система с диаг. преобладанием:

1) Однородная система имеет только тривиальное решение

$\Downarrow$

2) Матрица не вырождена

$\Downarrow$

3) Неоднородная система имеет и ед. реш. $\square$

П.5. Системы с трёхдиагональной матрицей

Метод прогонки.

$$A_i x_{i-1} - C_i x_i + B_i x_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, n-1} \quad (1)$$

$$x_0 = x_1 x_1 + q_0 \quad (2)$$

$$x_{n+1} = x_2 x_{n-1} + q_n$$

При этом: $A_i, B_i \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$

A_i, B_i, C_i, F_i , $i = \overline{1, n-1}$, x_1, x_2, q_0, q_n - заданы

Условия (2) наз-ся краевыми условиями.

В простейшем случае $x_1 = x_2 = 0$.

Система (1)-(2) представляет собой систему с трёхдиагональной матрицей D :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & -C_2 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n-1} & -C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_2 & 1 \end{pmatrix}$$

правой частью $\vec{F} = (q_0, -F_1, \dots, -F_{n-1}, q_n)^T$,
неизвестными $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T$

Метод прогонки:

① Положим, что между неизвестными имеется рекуррентное соотношение.

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (3)$$

где $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}, i = 0, \dots, n-1$ — пока неопределённые величины.

② $x_{i-1} = \alpha_i x_i + \beta_i$, подставим x_i, x_{i-1} в (1):

$$A_i (\alpha_i x_i + \beta_i) - C_i (\alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}) + B_i x_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$A_i \alpha_i (\alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}) + A_i \beta_i - C_i \alpha_{i+1} x_{i+1} - C_i \beta_{i+1} + B_i x_{i+1} = -F_i$$

$$(A_i \alpha_i \alpha_{i+1} - C_i \alpha_{i+1}) x_{i+1} + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i - C_i \beta_{i+1} + B_i x_{i+1} + F_i = 0$$

$$\underbrace{[A_i \alpha_i \alpha_{i+1} - C_i \alpha_{i+1} + B_i]}_{\text{коэффициент } \rightarrow 0} x_{i+1} + \underbrace{[A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i - C_i \beta_{i+1} + F_i]}_{\text{коэффициент } \rightarrow 0} = 0$$

Это выражение будет обращаться в ноль (т.е. выполнено уравнение), если выражения в квадратных скобках будут $= 0$ при $\forall i, \text{ т.е.}$

$$\begin{cases} A_i x_i x_{i+1} - C_i x_{i+1} + B_i = 0 \\ A_i x_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i - C_i \beta_{i+1} + F_i = 0 \end{cases}$$

⇒ рекуррентные соотношения:

$$x_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i x_i}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{-F_i - A_i \beta_i}{A_i x_i - C_i} = \frac{F_i + A_i \beta_i}{C_i - A_i x_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

($C_i - A_i x_i = 0? \neq 0?$) - вопрос

x_{i+1}, β_{i+1} - пропущенные коэффициенты
и они выводятся по ф-лам (4)

③ Зная $x_{i+1}, \beta_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$ можно найти x_i . Для реализации (4) нужно задать x_1 и β_1 .

1-е (3) при $i=0$: $x_0 = x_1 x_1 + \beta_1$

Первое ур-е (2): $x_0 = x_1 x_1 + q_0$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = x_1, \beta_1 = q_0}$$

Тем самым, ф-лы (4) позволяют найти все x_{i+1}, β_{i+1} .

Это наз-ся прямой ход вычисления.

④ Обратный ход: Нахождение $x_i, \beta_i, i = n, n-1, \dots, 1, 0$
Рекуррентные ф-лы:

$$x_i = x_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, \dots, 0$$

Нужно знать x_n :

Второе ур-е из (2):

$$x_n = x_2 x_{n-1} + q_n$$

и рек. соотношение при $i = n-1$:

$$x_{n-1} = x_n x_n + \beta_n$$

Из этих двух ур-ний исключается $x_{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ искомый x_n :

$$x_n = \frac{x_2 \beta_n + q_n}{1 - x_2 x_n} \quad (1 - x_2 x_n = 0? \neq 0?)$$

Условные р-лы где решение (1), (2):

Прямой ход:

$$i = 1, \dots, n-1$$

$$x_{i+1} = \frac{\beta_i}{C_i - A_i x_i}, \quad x_1 = x_1$$

$$\beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i \beta_i}{C_i - A_i x_i}, \quad \beta_1 = q_n$$

Обратный ход:

$$i = n-1, n-2, \dots, 1, 0$$

$$x_i = x_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}$$

$$x_n = \frac{x_2 \beta_n + q_n}{1 - x_2 x_n}$$

Корректность метода хоронки:

Теорема Пусть $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|, i = 1, \dots, n-1$
 $A_i \neq 0, B_i \neq 0$

$$|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_1| + |x_2| < 2.$$

Тогда метод хоронки корректен и устойчив к ошибкам округления.

Δ Корректность: нужно показать, что деления на ноль, т.е. $C_i - A_i x_i \neq 0, 1 - x_2 x_n \neq 0$

Для этого:

1) Покажем, что $|x_i| \leq 1, i = 1, \dots, n$

$$x_1 = x_1 \Rightarrow \text{по условию } |x_1| = |x_1| \leq 1$$

$$\text{Пусть } x_i: |x_i| \leq 1$$

$$\text{Покажем: } |x_{i+1}| \leq 1$$

$$|x_{i+1}| = \frac{|\beta_i|}{|C_i - A_i x_i|} \leq 1, \text{ т.к. } |C_i - A_i x_i| - |B_i| \geq$$

$$\geq |C_i| - |A_i| |x_i| - |B_i| \geq |C_i| - |A_i| - |B_i| \geq 0$$

Замечание: Если $|x_1| < 1 \Rightarrow$ все $|x_i| < 1$

Кремне моно

$$|C_i - \alpha_i A_i| \geq |C_i| - |\alpha_i| |A_i| \geq |C_i| - |A_i| \geq |B_i| \neq 0$$

$$\Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| > 0$$

Прямой ход корректен.

2) Для обратного хода: $1 - \alpha_2 \alpha_n \neq 0$

a) м.к $|\alpha_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_i| \leq 1$ (см. п. 1)

если $|\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_i| < 1$ и

$$|\alpha_2| \leq 1$$

$$\Rightarrow |\alpha_n| |\alpha_2| < 1 \Rightarrow 1 - \alpha_2 \alpha_n \neq 0$$

б) Если $|\alpha_1| = 1 \Rightarrow |\alpha_i| < 1$ и $|\alpha_2| < 1$

$$\Rightarrow |\alpha_n| |\alpha_2| < 1 \Rightarrow 1 - \alpha_2 \alpha_n \neq 0$$

Корр. доказана.

Устойчивость: невозрастание ошибок округления при обратном ходе

α_i - точное решение, $\tilde{\alpha}_i$ - округл. решение

$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i + \delta_{\alpha_i}$, δ_{α_i} - погрешность выч.

$$\alpha_i = \alpha_{i+1} \alpha_{i+2} + \beta_{i+1} \Rightarrow \delta_{\alpha_i} = \tilde{\alpha}_i - \alpha_i = \alpha_{i+1} (\tilde{\alpha}_{i+1} - \alpha_{i+1})$$

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha_{i+1} \tilde{\alpha}_{i+1} + \beta_{i+1} \Rightarrow \delta_{\alpha_i} = \alpha_{i+1} \delta_{\alpha_{i+1}}$$

$$\Rightarrow |\delta_{\alpha_i}| = |\alpha_{i+1}| |\delta_{\alpha_{i+1}}|, \text{ м.к } |\alpha_{i+1}| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\delta_{\alpha_i}| \leq |\delta_{\alpha_{i+1}}| \quad (\text{вычитание идет по } i \text{ от } n-1 \text{ до } 0) \quad \square$$

Замечание: Есть: левая скобка,
правая скобка,
но лямбда-скобка,
встречная,
потенциальная, ...

§2. Обусловленность СЛАУ. Число обусловленности

Корректность по Адамару

- 1) Решение $\exists$
- 2) Решение $!$
- 3) Решение непрерывно зависит от входных данных.

$\exists$ -ли системе

$$A\vec{x} = \vec{F}, \det A \neq 0.$$

Входные данные в данном случае $\Rightarrow \vec{F}$.

- 1) т.к. $\det A \neq 0 \Rightarrow$ решение $\exists$ и $!$
- 2) Выясним пер. зависимость от вход. данных:

$$A\vec{x} = \vec{F} \quad \text{и} \quad A\vec{\tilde{x}} = \vec{\tilde{F}}$$

Введем $\delta\vec{F} = \vec{\tilde{F}} - \vec{F}$ - погрешность правой части (входные данные).

• Непрерывная зависимость от входных данных означает, что

$$\|\delta\vec{x}\| = \|\vec{x} - \vec{\tilde{x}}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\delta\vec{F}\| \rightarrow 0.$$

Поняв, что это так и есть.

$$\Delta \quad \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\text{тогда: } \left. \begin{aligned} \vec{x} &= A^{-1} \vec{F} \\ \vec{\tilde{x}} &= A^{-1} \vec{\tilde{F}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{\tilde{x}} = A^{-1}(\vec{F} - \vec{\tilde{F}}) = A^{-1}\delta\vec{F}:$$

$$\boxed{\delta\vec{x} = A^{-1}\delta\vec{F}}$$

$\Downarrow$

$$\|\delta\vec{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta\vec{F}\|$$

Поскольку $\|A^{-1}\|$ - число $\Rightarrow \|\delta\vec{x}\| \rightarrow 0 \quad (\|\delta\vec{F}\| \rightarrow 0) \quad \square$

Итак: СЛАУ корректная (по Адамару)

задача

Одновременно: Мы имеем дело с вычислением $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ~~вычисляем~~ изучим характер этой непрерывности

Опр: $\delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{\tilde{x}}$ - абс. погрешность
 $\frac{\delta \vec{x}}{\|\vec{\tilde{x}}\|}$ - отн. погрешность.

Отн. погрешность для нас важнее.

• Для абс. погрешности мы получим пер-во:

$$\|\delta \vec{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta \vec{F}\|$$

Из самой системы:

$$\|\vec{F}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$$

~~Суммируем~~ первое пер-во на второе:

$$\frac{\|\delta \vec{x}\|}{\|A\| \cdot \|\vec{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta \vec{F}\|}{\|\vec{F}\|}, \text{ или:}$$

$$\frac{\|\delta \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\delta \vec{F}\|}{\|\vec{F}\|}$$

Опр: Число $M_A = \|A\| \|A^{-1}\|$ называют числом обусловленности. Оно позволяет оценить отн. ~~погрешность~~ погрешность решения через отн. погрешность правой части.

Пример: Т-ли задачу:

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 = f_1 \\ x_1 + 0,01 x_2 = f_2 \end{cases} \text{ т.е. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,01 \end{pmatrix}$$

где: 1) $\vec{F}_1 = (1, 1)^T$

2) $\vec{F}_2 = (1; 1.01)^T$

3) $\vec{F}_3 = (1; 1.02)^T$

$$\det A = 1,01 \neq 0$$

$$1) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + 0,01x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + 0,001x_2 = 1,01 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\|\vec{x}\| = 1, \quad \|\vec{\delta x}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|\delta \vec{x}\| = \|\vec{x} - \vec{\delta x}\| = 1$$

$$\|\delta \vec{f}\| = \|\vec{f} - \vec{\delta f}\| = 0,01, \quad \|\vec{f}\| = \sqrt{2}$$

$$\frac{\|\delta \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{\|\delta \vec{f}\|}{\|\vec{f}\|} = \frac{0,01}{\sqrt{2}} \approx 0,007$$

$$\frac{\|\delta \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = 1 \leq M_A \cdot 0,007$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + 0,01x_2 = 1,02 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Получили некоторые априорные оценки для числа обусловленности.

Лемма 1] Если матрица A не вырождена, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения A ,
 $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$

Тогда верно:

$$M_A \geq \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$$

Δ] $\vec{x}_k$ — собственный вектор, отв. собствен. значению λ_k , тогда:

$$\|A \vec{x}_k\| = |\lambda_k| \|\vec{x}_k\| \leq \|A\| \|\vec{x}_k\| \Rightarrow$$

$$|\lambda_k| \leq \|A\| \quad \forall k = 1, 2, \dots, n: |\lambda_n| \leq \|A\|$$

Аналогично:

$$\|A^{-1}x_k\| = |\lambda_k^{-1}| \|x_k\| \leq \|A^{-1}\| \|x_k\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda_k^{-1}| \leq \|A^{-1}\| \quad \forall k = \overline{1, n} : |\lambda_n^{-1}| \leq \|A^{-1}\|$$

$$\text{Умнож.: } M_A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right| \quad \square$$

Примеры: $M_A \geq 1$

* Для рассмотренного примера:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix} : \det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)(0.01 - \lambda)$$

$$\Rightarrow 0.01 = \lambda_1 < \lambda_2 = 1$$

$$\Rightarrow M_A \geq \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| = 100$$

Зам. 2] оператор $A = A^*$, $\det A \neq 0$ и

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \text{ тогда}$$

$$M_A = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|},$$

$$\text{где } 0 < |\lambda_1| = |\lambda_{\min}| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_{\max}| = |\lambda_n| - \text{с.з.}$$

Δ Выведем из того, что $\|A\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, если $A = A^*$.]

Выводы: 1) Число обуслов. M_A определяет характер устойчивости по правой части. Чем M_A больше $\rightarrow$ тем хуже.

2) $M_A \geq 1$

3) Число обус. M_A связано с max и min по модулю собственными значениями

§3. Итерационные методы решения СЛАУ

Постановка задачи: По-прежнему решаем СЛАУ $A\vec{x} = \vec{F}$.

Требования к методам: а) Могут быть применены с вычислительной устойчивостью в случае плохо обусловленной матрицы;
б) Требуют значительной памяти ЭВМ.

Второй класс методов - итерационные методы.

Итерационные методы: решение СЛАУ ищется как предел последовательных приближений (итераций) к точному решению.

1) Т.о., задача построения итерационного метода состоит в построении $\{\vec{x}^{(k)}\}$:
$$\vec{x}^{(k)} = \{x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{x} - \text{точное решение}$$

Здесь k - номер итерации

2) Если такая посл. построена $\Rightarrow$ то в качестве решения можно р-ть такое $\vec{x}^{(k)}$, что $\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\| < \epsilon$, где ϵ - заданная точность.

Основная цель: построить такую посл. $\{\vec{x}^{(k)}\}$, которая достигает заданной точности за как можно меньшее кол-во шагов.

Достоинства Итер. методов:

- а) меньше, по сравн. с прямыми методами, требуемая оперативная память;
- б) часто лучшая устойчивость к ошибкам округления

Недостатки: 1) Поиск начального приближения;
2) Большое кол-во действий,
если итераций много;
3) Хорошо работает с матри-
цами с отрицательными св-вами.

П. 1. Одношаговые итерационные методы (ИМ). Сходимость.

$$\text{Решаем } A\vec{x} = \vec{F}.$$

Тогда-ем одношаговые ИМ (двухшаговые):
каждое последующее приближение $\vec{x}^{(k+1)}$ нах-ся
по $\vec{x}^{(k)}$.

Линейный одношаговый ИМ можно записать
в каноническом виде:

$$B_{k+1} \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\tau_{k+1}} + A\vec{x}^{(k)} = \vec{F}, \quad \vec{x}^{(0)}$$

$$\det B_{k+1} \neq 0, \quad \tau_{k+1} > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Матрица B_{k+1} $n \times n$, итерационный параметр
 τ_{k+1} могут быть разными и все выбор
определяют метод и влияют на сс-тв и скорость.

Опр: Если B_{k+1} и τ_{k+1} одинаковы на всех
итерациях, то метод нах-ся стационарным.

Реализация: на k -ой итерации известны
 $\vec{F}$, $\vec{x}^{(k)}$, B_{k+1} , $\tau_{k+1} \Rightarrow$

$$B_{k+1} \vec{x}^{(k+1)} = B_{k+1} \vec{x}^{(k)} - \tau_{k+1} (A\vec{x}^{(k)} - \vec{F})$$

! B_{k+1} - должны быть
легко обратимы

! нужно задать
 $\vec{x}^{(0)}$

Опр: Пусть $\vec{x}$ - точное решение $A\vec{x} = \vec{f}$ и есть итерацион. посл. $\{\vec{x}^{(k)}\}, k=0, 1, 2, \dots$
 тогда $\vec{z}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{x}$ - погрешность решения ИМ.

Опр: Итерационный процесс конв-ся к точному решению, если $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{z}^{(k)}\| = 0$
 (или $\lim_{k \rightarrow \infty} z_i^{(k)} = 0, i = \overline{1, n}$)

Опр: Невязка метода конв-ся
 $\vec{\psi}_k = A\vec{x}^{(k)} - \vec{f}$

Лем: Для линейного операторного ИМ
 $\|\vec{z}^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \|\vec{\psi}_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Δ 1) $\exists \|\vec{z}^{(k)}\| \rightarrow 0$

$$\vec{\psi}_k = A\vec{x}^{(k)} - \vec{f} = A(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}) + \underbrace{A\vec{x} - \vec{f}}_{=0} = A\vec{z}^{(k)}$$

$$\Rightarrow \|\vec{\psi}_k\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{z}^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

2) $\exists \|\vec{\psi}_k\| \rightarrow 0$: т.к. $\vec{\psi}_k = A\vec{z}^{(k)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{z}^{(k)} = A^{-1} \vec{\psi}_k \Rightarrow \|\vec{z}^{(k)}\| \leq \|A^{-1}\| \|\vec{\psi}_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \square$$

• Некоторые св-ва самосопряженных, положит.

опред. матриц:

1) $A = A^*$, если $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y})$ $\forall \vec{x}, \vec{y}$ ($a_{ij} = a_{ji}$)

2) $A > 0$, если $(A\vec{x}, \vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq 0$

3) $A = A^* \Rightarrow$ все с.з. вещественны

4) $A = A^* \Rightarrow \exists$ набор из св. собств. ортонормированных векторов

Лем. 1 $A = A^*$ положит. определен $\Leftrightarrow$
 когда все её с.з. положительны.

$\Delta \Rightarrow \vec{e}_j$ - базис из собств. векторов (ортонорм.),

$$A > 0 \Rightarrow (A\vec{e}_j, \vec{e}_j) = \lambda_j > 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$\Leftarrow \lambda_i > 0, \quad i = \overline{1, n} \quad \text{и} \quad \forall \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

$$(A\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i > 0 \quad \square$$

Упр. 2 $A = A^* > 0, 0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$; тогда
 $\forall \vec{x} \neq \vec{0} : \lambda_1 \|\vec{x}\|^2 \leq (A\vec{x}, \vec{x}) \leq \lambda_n \|\vec{x}\|^2$ (с. упр. 1)

Упр. 3 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : (A\vec{x}, \vec{x}) \geq \delta \|\vec{x}\|^2, \vec{x} \neq \vec{0}$

$$\Delta (A\vec{x}, \vec{x}) = \left(\frac{A+A^*}{2} \vec{x}, \vec{x} \right) = \left\{ \frac{A+A^*}{2} = \left(\frac{A+A^*}{2} \right)^* \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по упр. 2} \Rightarrow (A\vec{x}, \vec{x}) \geq \lambda_n \|\vec{x}\|^2, \text{ где}$$

$\lambda_n > 0$ - мин. с.зн. $\frac{A+A^*}{2}$. Положим $\delta = \lambda_n$,
 приходим к требуемому нер-ву $\square$

Достат. усл-я сс-ты ИМ:

Теорема Самарского: Пусть $A = A^* > 0$,

$B - \frac{\tau}{2} A > 0, \tau > 0$, тогда операторный

стажон. ИМ сс-ся к решению СЛАУ

при $\forall$ выборе начального приближения.

$$\Delta 1) \vec{z}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{x} \Rightarrow \vec{x}^{(k+1)} = \vec{z}^{(k+1)} + \vec{x}$$

$$\vec{x}^{(k)} = \vec{z}^{(k)} + \vec{x}$$

$$\text{Тогда из } B \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\tau} + A \vec{x}^{(k)} = \vec{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \frac{\vec{z}^{(k+1)} - \vec{z}^{(k)}}{\tau} + B \frac{\vec{x} - \vec{x}}{\tau} + A \vec{z}^{(k)} = 0$$

или

$$B \vec{z}^{(k+1)} = B \vec{z}^{(k)} - \tau A \vec{z}^{(k)}$$

$$2) \text{ м.к } B - \frac{\tau}{2} A > 0 \Rightarrow \{A > 0\} \Rightarrow B > 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$\Rightarrow \vec{z}^{(k+1)} = \vec{z}^{(k)} - \tau B^{-1} A \vec{z}^{(k)} = \vec{z}^{(k)} - \tau \vec{w}_k, \text{ где}$$

$$\vec{w}_k = B^{-1} A \vec{z}^{(k)}$$

$$\text{или } B \vec{w}_k = A \vec{z}^{(k)}$$

$$3) \text{ умнож: } \vec{z}^{(k+1)} = \vec{z}^{(k)} - \tau \vec{w}_k$$

J -умн:

$$J_k = (A \vec{z}^{(k)}, \vec{z}^{(k)}) > 0$$

$$J_{k+1} = (A \vec{z}^{(k+1)}, \vec{z}^{(k+1)}) > 0, \text{ где снова:}$$

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= (A \vec{z}^{(k)} - A \vec{w}_k \tau, \vec{z}^{(k)} - \vec{w}_k \tau) = (A \vec{z}^{(k)}, \vec{z}^{(k)}) - \\ &- \tau (A \vec{w}_k, \vec{z}^{(k)}) \stackrel{A=A^*}{=} - (A \vec{z}^{(k)}, \vec{w}_k) \tau + \tau^2 (A \vec{w}_k, \vec{w}_k) = \\ &= \underbrace{(A \vec{z}^{(k)}, \vec{z}^{(k)})}_{J_k} - 2 \underbrace{(A \vec{z}^{(k)}, \vec{w}_k)}_{B \vec{w}_k} \tau + \tau^2 (A \vec{w}_k, \vec{w}_k) = \\ &= J_k - 2 \tau \underbrace{\left[\left(B - \frac{\tau}{2} A \right) \vec{w}_k, \vec{w}_k \right]}_{>0} \leq J_{k+1} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_{k+1} \leq J_k \Rightarrow$$

$J_k \downarrow$ - убывает, гранич. снизу 0 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \{J_k\} \rightarrow \text{ср. цен} \Rightarrow J_{k+1} - J_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

4) умнож:

$$-J_{k+1} + J_k = 2\tau \left(\left(B - \frac{\tau}{2} A \right) \vec{w}_k, \vec{w}_k \right):$$

$$a) B - \frac{\tau}{2} A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0:$$

$$\left(\left(B - \frac{\tau}{2} A \right) \vec{w}_k, \vec{w}_k \right) \geq \delta \|\vec{w}_k\|^2$$

$$\delta) \underbrace{-J_{k+1} + J_k}_{\downarrow k \rightarrow \infty} \geq \delta \|\vec{w}_k\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{умнож: } \|\vec{w}_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$5) \vec{z}^{(k)} = A^{-1} B \vec{w}_k \quad (\vec{w}_k = B^{-1} A \vec{z}^{(k)}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\vec{z}^{(k)}\| \leq \|A^{-1} B\| \|\vec{w}_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \|\vec{z}^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

□

Замечание: Вопрос о скорости сходимости зависит от A, B и в данной мере не обсуждается

П.2. Метод простой итерации (МПИ)

$$B \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\tau} + A \vec{x}^{(k)} = \vec{f}$$

$B = E$, τ - шаг итерационного процесса

$$\frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\tau} + A \vec{x}^{(k)} = \vec{f}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \tau (-A \vec{x}^{(k)} + \vec{f}) \quad - \text{МПИ}$$

$\vec{x}^{(0)}$ - заданные

Теорема МПИ для системы ур-ний, в которой $A = A^* > 0$ будет с-ся при малом начальном приближении, если $\tau < \frac{2}{\lambda_{\max}}$, где $\lambda_{\max}$ - max c.z. A

Δ Из τ симметрично $\Rightarrow$ гост. ур-ие с-ся методом:

$$B - \frac{\tau}{2} A > 0 \Rightarrow E - \frac{\tau}{2} A > 0$$

также $C = C^*$ положит. ч-во $\lambda_{\min} > 0 \Rightarrow C > 0 \Rightarrow$ положит. симметрич.

$$C = E - \frac{\tau}{2} A = C^* \Rightarrow \lambda_{\max} \|\vec{x}\|^2 \geq (C \vec{x}, \vec{x}) \geq \lambda_{\min} \|\vec{x}\|^2$$

λ_i - c.z. матрицы C , $\lambda_i = 1 - \frac{\tau}{2} \lambda_i$, $i = 1, n$
 λ_i - c.z. A

Мы хотим показать, что $C > 0$?

$$\begin{aligned} (C \vec{x}, \vec{x}) &\geq \lambda_{\min} \|\vec{x}\|^2 = \left\{ \lambda_{\min} = \min_i \left(1 - \frac{\tau}{2} \lambda_i \right) = \right. \\ &= \left. 1 - \frac{\tau}{2} \lambda_{\max} \right\} = \left(1 - \frac{\tau}{2} \lambda_{\max} \right) \|\vec{x}\|^2 > 0 \quad \text{если} \\ 1 - \frac{\tau}{2} \lambda_{\max} &> 0, \text{ т.е. } \tau < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (\text{а это дано в условии теоремы}) \quad \square \end{aligned}$$

Условие сх-му же МПИ

$$\rho < \frac{2}{\lambda_{\max}} \Leftrightarrow \rho < \frac{2}{\|A\|}$$

$A=A^* > 0$

• $S = E - \tau A$ — матрица перескога

Теорема МПИ сх-ся $\Leftrightarrow$ когда все с.з. матрицы S по модулю меньше 1.

$$\Delta \quad 1) \quad \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \tau A \vec{x}^{(k)} + \tau \vec{f}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{(E - \tau A)}_S \vec{x}^{(k)} + \tau \vec{f}$$

$$2) \quad \vec{z} = \vec{x} - \vec{x}^{(k)} \Rightarrow \vec{x}^{(k)} = \vec{x} + \vec{z}^{(k)}$$

"погрешность"

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x} - \vec{z}^{(k+1)} \Rightarrow$$

$$\vec{x} - \vec{z}^{(k+1)} = \vec{x} + \vec{z}^{(k)} + A \vec{x} - A \vec{z}^{(k)} - \vec{f}$$

$$\frac{-\vec{z}^{(k+1)} + \vec{z}^{(k)}}{\tau} + \underbrace{A \vec{x} - \vec{f}}_0 - A \vec{z}^{(k)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{z}^{(k+1)} - \vec{z}^{(k)}}{\tau} + A \vec{z}^{(k)} = 0$$

Далее сх-му надо $\|\vec{z}^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

$$\boxed{\vec{z}^{(k+1)} = (E - \tau A) \vec{z}^{(k)}} \quad (*)$$

3) $\boxed{\Rightarrow}$] можем сх-ся $\stackrel{?}{\Rightarrow} |p_i| < 1$, где p_i — с.з. S . $S = E - \tau A$.
 $\|\vec{z}^{(k)}\| \rightarrow 0$

$S = S^* \Rightarrow \exists$ n с.з. $p_1, \dots, p_n$ и $\exists$ ОНБ базис из с.векторов $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$
 Пусть $\exists p_{i_0} : |p_{i_0}| > 1 \Rightarrow$ ему соответ-

свойств. соб. вектор $\vec{e}_{i_0}$

$$\vec{z}^{(k)} = \vec{x} - \vec{z}^{(k)}, \quad \vec{z}^{(k)} = \vec{x} - \vec{z}^{(k)}$$

2] $\vec{z}^{(0)} = \vec{x} + \vec{e}_{i_0}$. Тогда из (*) $\Rightarrow$

$$\vec{z}^{(k+1)} = S \vec{z}^{(k)} = \dots = S \dots S \vec{z}^{(0)}$$

$$\vec{z}^{(1)} = S \vec{z}^{(0)} = S(\vec{x} - \vec{z}^{(0)}) = S(-\vec{e}_{i_0}) = -\mu_{i_0} \vec{e}_{i_0}$$

$$\Rightarrow \|\vec{z}^{(k)}\| = |\mu_{i_0}|^k \|\vec{e}_{i_0}\| = |\mu_{i_0}|^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \text{гиперубежение}$$

4) $\boxed{\Leftarrow}$] все с.з. $|\mu_i| < 1$

$$\vec{z}^{(k+1)} = S \vec{z}^{(k)}$$

$$\|\vec{z}^{(k+1)}\| = \|S \vec{z}^{(k)}\| \leq \|S\| \|\vec{z}^{(k)}\| = \{S = S^* \Rightarrow$$

$$\|S\| = \max_i (\mu_i) = |\mu_{i_0}| \|\vec{z}^{(k)}\| \leq |\mu_{i_0}|^{k+1} \|\vec{z}^{(0)}\|$$

Тогда $|\mu_{i_0}| < 1 \Rightarrow |\mu_{i_0}|^{k+1} \|\vec{z}^{(0)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \square$

Утечка:] $A = A^* > 0$. Тогда наиб. скорость

МТН достигается при $\tau = \tau_0 = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$

$$\Delta \|\vec{z}^{(k+1)}\| \leq \|S\| \|\vec{z}^{(k)}\| \leq \dots \leq \|S\|^{k+1} \|\vec{z}^{(0)}\| =$$

{ $q = |\mu_{i_0}| = \max_i |\mu_i|, \mu_i - \text{с.зн. } S \}$ $\Rightarrow$

$$\|\vec{z}^{(k+1)}\| \leq q^{k+1}(\tau) \|\vec{z}^{(0)}\|$$

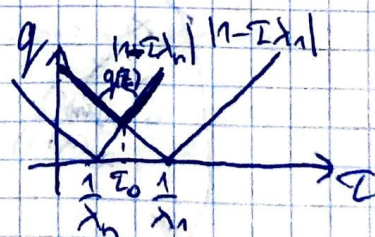
~~q~~ $q(\tau) = \max_i \{|\mu_i|\} = \max_i \{ |1 - \tau \lambda_i| \}$,
где $\lambda_i - \text{с.зн. } A$.

] $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \Rightarrow$

$$q(\tau) = \max \{ |1 - \tau \lambda_1|, |1 - \tau \lambda_n| \}$$

Найдем $\min_{\tau} q(\tau)$:

$$q(\tau) = \max \{ |1 - \tau \lambda_1|, |1 - \tau \lambda_n| \}$$



$$q(\tau) = \begin{cases} |1 - \tau \lambda_n|, & \tau > \tau_0 \\ |1 + \tau \lambda_n|, & \tau \leq \tau_0 \end{cases}$$

$$1 - \tau \lambda_n = -1 + \tau \lambda_1$$

$$\tau(\lambda_1 + \lambda_n) = 2 \Rightarrow \tau = \tau_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \quad \square$$

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{2}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)$$

П.3. Memory Зейгель

$$B \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\tau} + A \vec{x}^{(k)} = \vec{f}$$

Список

$$A = A_L + D + A_R$$

A_L - левая mp
 A_R - правая mp.

$$B = A_L + D$$

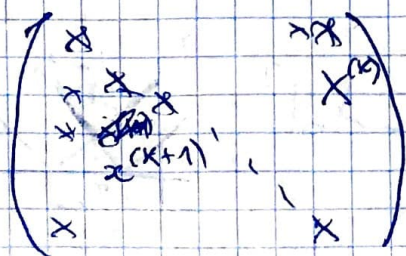
$\tau = 1$

$$\tau = 1$$

$$(A_L + D) (\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}) + A \vec{x}^{(k)} = \vec{f}$$

$$(A_L + D) \vec{x}^{(k+1)} - (A_L + D) \vec{x}^{(k)} + (A_L + D + A_R) \vec{x}^{(k)} = \vec{f}$$

$$(A_L + D) \vec{x}^{(k+1)} + A_R \vec{x}^{(k)} = \vec{f}$$



$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} + a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)} = f_1 \\ a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)} = f_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn}x_n^{(k+1)} = f_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{ii}x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + f_i$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + f_i \right] \quad a_{ii} \neq 0$$

$i = 1, \dots, n$

• Если $a_{ii} = 0 \Rightarrow$ менять строку (максимум i -мб. неограничен, т.к. $\det A \neq 0$)

Теорема] $A = A^* > 0$, тогда можно записать в-се при $\forall$ нач. приближении.

ΔB соотв. с т. Сильвестра, надо показать, что $B - \frac{1}{2}A > 0 : (A_L + D) - \frac{1}{2}A > 0, \tau = 1$

$$A_L + D - \frac{1}{2}(A_L + D + A_R) = \frac{1}{2}(A_L + D - A_R)$$

Дост. показать, что $A_L + D - A_R > 0$

$$((A_L + D - A_R)\vec{x}, \vec{x}) = (A_L\vec{x}, \vec{x}) + (D\vec{x}, \vec{x}) - (A_R\vec{x}, \vec{x}) =$$

$$= \{A = A^* \Rightarrow A_R^* = A_L \Rightarrow (A_R\vec{x}, \vec{x}) = (A_L\vec{x}, \vec{x})\} =$$

$$= (D\vec{x}, \vec{x}) = ? \text{ по кр. Сильвестра } D > 0, \text{ т.к. все глав. эл-мб. матрицы } D > 0 \Rightarrow$$

можно в-се $\square$

Теорема] $A = \{a_{ij}\}$ и надо показать:

$$|a_{ii}|^q \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|^q, \quad 0 < q < 1, \quad i = 1, n$$

Тогда можно записать в-се, при этом со свойствами нач. приближения.

$$\Delta \quad \|\vec{z}^{(k)}\| = \|\vec{z}^{(k)} - \vec{z}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad ?$$

$$\vec{z}^{(k)} = \vec{z}^{(k)} - \vec{z} \Rightarrow \vec{z}^{(k)} = \vec{z}^{(k)} + \vec{z}$$

$$(A_L + D) \vec{z}^{(k+1)} + A_R \vec{z}^{(k)} = \vec{f}$$

$$(A_L + D) (\vec{z}^{(k+1)} + \vec{z}) + A_R (\vec{z}^{(k)} + \vec{z}) = \vec{f}$$

$$(A_L + D) \vec{z}^{(k+1)} + \underbrace{(A_L + D + A_R) \vec{z} - \vec{f} + A_R \vec{z}^{(k)}}_{=0} = 0$$

$$(A_L + D) \vec{z}^{(k+1)} + A_R \vec{z}^{(k)} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{i_0-1} a_{ij} z_j^{(k+1)} + a_{ii} z_i^{(k+1)} + \sum_{j=i_0+1}^n a_{ij} z_j^{(k)} = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$a_{ii} z_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{ij} z_j^{(k+1)} - \sum_{j=i_0+1}^n a_{ij} z_j^{(k)} \rightarrow i = i_0$$

$$2) \quad \|\vec{z}^{(k)}\|_c = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j^{(k)}| = |z_{i_0}^{(k)}|$$

$$|a_{i_0 i_0}| |z_{i_0}^{(k+1)}| = \left| - \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0 j} z_j^{(k+1)} - \sum_{j=i_0+1}^n a_{i_0 j} z_j^{(k)} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}| |z_j^{(k+1)}| + \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| |z_j^{(k)}| \quad \textcircled{2}$$

$$3) \quad |z_{i_0}^{(k+1)}| = \|\vec{z}^{(k+1)}\|_c, \quad |z_j^{(k+1)}| \leq \|\vec{z}^{(k+1)}\|_c,$$

$$|z_j^{(k)}| \leq \|\vec{z}^{(k)}\|_c$$

$$\textcircled{2} \quad |a_{i_0 i_0}| \|\vec{z}^{(k+1)}\|_c \leq \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}| \|\vec{z}^{(k+1)}\|_c + \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| \|\vec{z}^{(k)}\|_c$$

$$\|\vec{z}^{(k+1)}\|_c \leq \underbrace{\sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| \frac{1}{|a_{i_0 i_0}| - \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}|}}_{\leq 1} \|\vec{z}^{(k)}\|_c \quad \textcircled{3}$$

no yenebun:

$$|a_{ii}|q \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

$$|a_{ii}|q \geq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|$$

$$|a_{ii}|q - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \geq \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < q < 1 \\ q[|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|] \geq |a_{ii}|q - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$q[|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|] \geq \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|$$

$$\Rightarrow \|\vec{z}^{(k+1)}\|_c \leq q \|\vec{z}^{(k)}\|_c$$

$$\|\vec{z}^{(k+1)}\|_c \leq q^{k+1} \|\vec{z}^{(0)}\|_c \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$q < 1$

$\Rightarrow \|\vec{z}^{(k+1)}\|_c \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, m.k. uz ox-mu no oqnot
norma culequm ox-mu no ma'ni guruhu norma (351)

МПУ: $\|\vec{z}^{(k+1)}\| \leq \cancel{\dots} q_1^{k+1} \|\vec{z}^{(0)}\|$

$$q_1 = q(\tau_0)$$

$$q(\tau_0) = 1 - \tau_0 \lambda_1 = 1 - \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \lambda_1 = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_n} = \frac{\frac{\lambda_n}{\lambda_1} - 1}{\frac{\lambda_n}{\lambda_1} + 1} =$$

$$= \frac{M_A - 1}{M_A + 1}$$

7.4. Метод верхней релаксации

$$B \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\tau} + A \vec{x}^{(k)} = \vec{f}$$

$$] A = A_L + D + A_R$$

$$B = (D + \omega A_L), \quad \tau = \omega$$

$$(D + wA_L) \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{w} + A \vec{x}^{(k)} = \vec{f}$$

1. Замечание

Если $w=1 \equiv$ Зейделя

2. Замечание

но - неслучайно абстрактный метод

$$\left(\frac{D}{w} + A_L\right) \vec{x}^{(k+1)} - \left(\frac{D}{w} + A_L\right) \vec{x}^{(k)} + A \vec{x}^{(k)} = \vec{f}$$

$$\left(\frac{D}{w} + A_L\right) \vec{x}^{(k+1)} = \left(\frac{D}{w} + A_L\right) \vec{x}^{(k)} - A_L \vec{x}^{(k)} - D \vec{x}^{(k)} - A_R \vec{x}^{(k)} + \vec{f}$$

$$\left(\frac{D}{w} + A_L\right) \vec{x}^{(k+1)} = \frac{D}{w} \vec{x}^{(k)} - D \vec{x}^{(k)} - A_R \vec{x}^{(k)} + \vec{f} \cdot w$$

$$(D + wA_L) \vec{x}^{(k+1)} = D \vec{x}^{(k)} + w \left[\vec{f} - D \vec{x}^{(k)} - A_R \vec{x}^{(k)} \right]$$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} + w \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} = a_{ii} x_i^{(k)} + w \left[f_i - a_{ii} x_i^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = a_{ii} x_i^{(k)} + w \left[f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], i = \overline{1, n}$$

Теорема

$A = A^* > 0$, $0 < w < 2$, тогда метод Зейделя релаксационный сс-сх при $\forall$ начальных приближениях.

Δ Т. Самарского: $B = \frac{1}{2} A^2 > 0 \Rightarrow (D + wA_L) - \frac{w}{2}(A_L + D + A_R) > 0 \Rightarrow C > 0$

$$\begin{aligned} (C \vec{x}, \vec{x}) &= ((D + wA_L) \vec{x}, \vec{x}) - \frac{w}{2} (A_L \vec{x}, \vec{x}) - \frac{w}{2} (D \vec{x}, \vec{x}) - \\ &- \frac{w}{2} (A_R \vec{x}, \vec{x}) = (D \vec{x}, \vec{x}) - \frac{w}{2} (D \vec{x}, \vec{x}) + w (A_L \vec{x}, \vec{x}) - \\ &- \frac{w}{2} (A_L \vec{x}, \vec{x}) - \frac{w}{2} (A_R \vec{x}, \vec{x}) = \left(1 - \frac{w}{2}\right) (D \vec{x}, \vec{x}) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{W}{2} (A_L \vec{x}, \vec{x}) - \frac{W}{2} (A_R \vec{x}, \vec{x}) = \{ A = A^* \Rightarrow A_L^* = A_R \}$$

$$= (1 - \frac{W}{2}) (D \vec{x}, \vec{x}) + \frac{W}{2} (A_L \vec{x}, \vec{x}) - \frac{W}{2} (\vec{x}, A_L \vec{x}) =$$

$$= (1 - \frac{W}{2}) (D \vec{x}, \vec{x}) = \{ \text{no up. Губбецма} \text{ уам. } D > 0 \}$$

$$\text{еще } 1 - \frac{W}{2} > 0 \Leftrightarrow \boxed{2 > W > 0} \quad \square$$

Задача:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = y^{(0)} = 0$$

$$1) \text{ МПН: } \tau = \tau_0 = \frac{2}{\lambda_{\max} \lambda_{\min}} = \frac{2}{5}$$

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} > 0 \Rightarrow A \succ A^* > 0$$

$$\frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\tau} + A \vec{x}^{(k)} = \vec{f}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \tau A \vec{x}^{(k)} + \tau \vec{f}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{2}{5} (3x^{(k)} + y^{(k)}) + \frac{4}{5}$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{2}{5} (x^{(k)} + 2y^{(k)}) + \frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x^{(k)} - \frac{2}{5}y^{(k)} + \frac{4}{5} \\ y^{(k+1)} = \frac{2}{5}y^{(k)} - \frac{2}{5}x^{(k)} - \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$1) x^{(1)} = -\frac{1}{5}x^{(0)} - \frac{2}{5}y^{(0)} + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

$$y^{(1)} = \frac{2}{5}y^{(0)} - \frac{2}{5}x^{(0)} - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$2) x^{(2)} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \cdot (-\frac{2}{5}) + \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$

$$y^{(2)} = \frac{2}{5} \cdot (-\frac{2}{5}) - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{20}{25} = -\frac{4}{5}$$

$$3) x^{(3)} = -\frac{1}{5} \left(\frac{16}{25} \right) - \frac{2}{5} \left(-\frac{4}{5} \right) + \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$y^{(3)} = \frac{2}{5} \cdot (-\frac{4}{5}) - \frac{2}{5} \cdot \frac{24}{25} - \frac{2}{5} = -\frac{22}{25}$$

2) Метод Зейделя

$$\begin{cases} 3x^{(k+1)} + y^{(k)} = 2 \\ x^{(k)} + 2y^{(k+1)} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = -\frac{1}{3}y^{(k)} + \frac{2}{3} \\ y^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x^{(k+1)} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$1) x^{(1)} = -\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y^{(1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$$

$$2) x^{(2)} = -\frac{1}{3}y^{(1)} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{2}{3} = \frac{5}{18} + \frac{12}{18} = \frac{17}{18}$$

$$y^{(2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{17}{18} - \frac{1}{2} = -\frac{17}{36} - \frac{18}{36} = -\frac{35}{36}$$

Глава 2. Интерполяция и приближение функций

П. 1. Постановка задачи интерполяции

1] на $[a, b]$ заданы точки $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

2] в этих точках известны значения некоторой ф-ции $f(x)$: $f(x_0) = f_0, f(x_1) = f_1, \dots, f(x_n) = f_n$.

Тогда п-ция ф-ция $F(x)$ на $[a, b]$:

$F(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}$; и $F(x)$ наз-ся

интерполирующей ф-цией для ф-ции $f(x)$ по точкам $\{x_i\}$.

Задача 1) $F(x)$ - находить значения $F(x)$ для $x \in [a, b] \neq x_i$

2) Хорошая интерполяция: $F(x)$ мало отличается от $f(x)$ вне x_i

Примерно: $F(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x)$, $\varphi_i(x)$ - набор ф-ий (система)

$f(x)$: x_i
 f_i
 $F(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}$; c_i - коэф-ты, подлежат определению

$$\begin{cases} c_0 \varphi_0(x_0) + c_1 \varphi_1(x_0) + \dots + c_n \varphi_n(x_0) = f_0 \\ c_0 \varphi_0(x_1) + c_1 \varphi_1(x_1) + \dots + c_n \varphi_n(x_1) = f_1 \\ \dots \\ c_0 \varphi_0(x_n) + c_1 \varphi_1(x_n) + \dots + c_n \varphi_n(x_n) = f_n \end{cases}$$

Ищем: $c_0, \dots, c_n$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Значение определителя зависит от:

а) φ_i ; б) x_i

Система $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ наз-ся Чебышевской системой по точкам $x_0, x_1, \dots, x_n$, если $\Delta \neq 0$

Если $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ - Чебышевские, то она ЛНЗ. Обращение неверно.

$$\begin{cases} f_0(x) = \sin x \\ f_1(x) = \cos x \end{cases}$$

$$f_1(x) = \cos x$$

$$x_0 = 0, x_1 = \pi \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} \sin 0 & \sin \pi \\ \cos 0 & \cos \pi \end{vmatrix} = 0$$

П.2. Интерполирующая полиномиальная

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \dots, \varphi_k(x) = x^k, \dots, \varphi_n(x) = x^n$$

$$F(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i - \text{полином степени } n$$

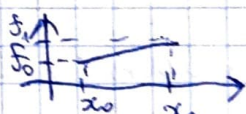
$$F(x_j) = \sum_{i=0}^n c_i x_j^i = f_j, \quad j = \overline{0, n}$$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \dots + c_n x_0^n = f_0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots + c_n x_1^n = f_1 \\ \dots \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \dots + c_n x_n^n = f_n \end{cases}$$

$$\Delta \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_i - x_j) \neq 0, \text{ если } x_i \neq x_j$$

Существование $\text{omn. } C_0, \dots, C_n - \exists u!$
 $\Rightarrow$ Униформизационный мн-н $\exists u!$
 (каждо n точек $n+1$ - наименьшая степень n)

Пример: x_0, x_1
 f_0, f_1



$$1) F(x) = P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$2) F(x) = P_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$3) F(x) = C_0 + C_1 x \quad \begin{cases} C_0 + C_1 x_0 = f_0 \\ C_0 + C_1 x_1 = f_1 \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}, \quad C_0 = x_0 \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} + f_0$$

формулы записи универ

П.3. Униформизационный мн-н Лагранжа

$$x_i, i = \overline{0, n}; \quad f_i = f(x_i)$$

$P_n(x)$ - наименьшая n -ой степени

$$P_n(x_i) = f_i, \quad i = \overline{0, n}$$

Выводим след. формулу: $P_{n,i} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$

$$P_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$Q_{n,i}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & x = x_j, j \neq i \end{cases}$$

$$P_n(x) = f_0 \cdot Q_{n,0}(x) + f_1 \cdot Q_{n,1}(x) + \dots + f_n \cdot Q_{n,n}(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i Q_{n,i}(x) \quad \text{— полином в форме Лагранжа}$$

$$P_n(x_i) = f(x_i)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

7.4 Интерполяционный полином в форме Ньютона

Можно задавать точки в интерполирующей функции

$$P_n(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^n (P_i(x) - P_{i-1}(x))$$

$P_i(x)$ — интерп. полином по точкам $x_0, x_1, \dots, x_i$

1) $P_i(x) - P_{i-1}(x)$ — полином степени i

2) $P_i(x) - P_{i-1}(x)$ — обращается в ноль в точках $x = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}$

⇒ Полином $P_i(x) - P_{i-1}(x) = A_i(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})$

3) A_i — коэффициент при старшей степени x^i . В полиноме $P_i(x) - P_{i-1}(x)$ или $x^i \rightarrow$ взят из $P_i(x) \rightarrow A_i$ — старш. коэф. $P_i(x)$

$$P_i(x) = \sum_{j=0}^i f_j \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^i \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)} \Rightarrow$$

Ст. коэф. при $P_i(x) \Rightarrow$

✱ ✱ ✱

$$A_0 = f_0$$

наименование
Хлебозащита

$$P_n(x) = f_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + A_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

15/5/22

3. case: $[a, b] \rightarrow f(x), a = x_0, b = x_n$

7.5. Оценка корреляции интервалов.

$$P_n(x), f(x), [a, b], a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$P_n(x_i) = f(x_i) \Rightarrow$ нахожём значения f в $x \neq x_i$

Полезность напоминание: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$,
 $x \in [a, b]$

Зам. $R_n(x_i) = 0, i = \overline{0, n}$

Теорема] $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ $n+1$ пер. производных и $P_n(x)$ — многочлен степени n . Тогда $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_n$, $\xi \in [a, b]$, $w_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

Δ 1) $R_n(x_i) = 0 \Rightarrow R_n(x) = \underline{r(x)} w_n(x)$

2) $g(t) = f(t) - P_n(t) - r(x) w_n(t)$

$g=0$ при $t = x_0, \dots, x_n$; $g=0, t=x$

$f(x_i) = P_n(x_i)$

$f(x) - P_n(x) = R_n(x)$

$w_n(x_i) = 0$

$g(t)$: она имеет $n+2$ корня $\Rightarrow g'(t)$ имеет $n+1$ корень (по Т. Ролля)

$g'(t)$: имеет $n+1$ корень $\Rightarrow$ Т. Ролля

$g''(t) = 0$ в n точках

$\exists \xi \in [a, b] \quad g^{(n+1)}(\xi) = 0$

3) $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \underbrace{P_n(t)}_0^{(n+1)} - r(x) (w_n)^{(n+1)}$

$(w_n)^{(n+1)} = (n+1)!$

$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - r(x) (n+1)! = 0$

$\Rightarrow r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

$\Rightarrow R_n(x) = r(x) w_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_n(x)$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_n(x)$

□

Л-е 1: Оценка $R_n(x)$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |(x-x_0) \dots (x-x_n)|,$$

$$M = \sup_{[a,b]} f^{(n+1)}(x)$$

Л-е 2: Пусть $h = \max_i (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$

$$\text{Тогда } |f(x) - R_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Зам 1: Если $f(x)$ имеет быстро меняющееся (^{неуправ.} ~~неуправ.~~) производные, не говоря уже, то оценка погрешности и.б. много хуже.

Зам 2: $x \in [a, b]$

x вне $[a, b]$ - теорема работавшая не будет

П. 6. Умнож. ил-ия Эпштейна

$f(x)$ в $T. x_0, x_1, \dots, x_n = f_i$

Пакет информации $x_0: f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(N_0-1)}(x_0) \rightarrow N_0$

$x_1: f(x_1), f'(x_1), \dots, f^{(N_1-1)}(x_1) \rightarrow N_1$

$x_n: f(x_n), f'(x_n), \dots, f^{(N_n-1)}(x_n) \rightarrow N_n$

Всего: $N_0 + \dots + N_n$ - задан

Полностью описан элемент

$$m = N_0 + N_1 + \dots + N_{n-1}$$

$K_m(x): K_m(x_i) = f^{(k)}(x_i), i = \overline{0, n}$

$k = \overline{0, N_i-1}$

умнож. ил-ия Эпштейна

Теорема Умно. ненулев. полинома $\exists$ u!

$$\Delta \quad U_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$$

$$x_0: \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_m x_0^m = f_0 \\ a_1 + 2a_2 x_0 + \dots + m a_m x_0^{m-1} = f'_0 \end{cases}$$

$$N_0$$

$$x_n: \begin{cases} a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_m x_n^m = f_n \\ a_1 + 2a_2 x_n + \dots + m a_m x_n^{m-1} = f'_n \end{cases}$$

$$N_n$$

$\rightarrow$ CAAU em $a_0, a_1, \dots, a_m$

Размерность: $N_0 + \dots + N_n = m+1$

$\exists$ -ли однородно системе ($f_i^{(k)} = 0$)

$$U_m^{(k)}(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n, \quad k = 0, \dots, N_i - 1$$

Система однородная система имеет тривиальное решение

$\Rightarrow \exists a_0, a_1, \dots, a_m$ ненулевая одн-система

$\Rightarrow U_m(x) = 0$ в $m+1$ точке с учетом

кратности $\Rightarrow$ тривиальное $\Rightarrow$ однородная система

имеет ненулевое тривиальное решение

$\Rightarrow$ не одн. имеет ед. решение. $\square$

Теорема $R_m(x) = f(x) - U_m(x)$

$\exists$ ф-я $f(x)$ на $[a, b]$ имеет $m+1$ непер. производных, тогда

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} w_m(x), \quad \xi \in [a, b]$$

$$w_m(x) = (x-x_0)^{N_0} (x-x_1)^{N_1} \dots (x-x_n)^{N_n}$$

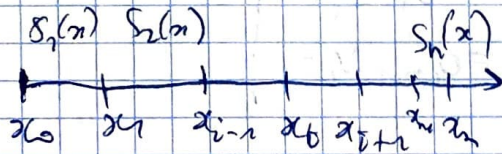
Δ Полное аналогично полин. Лагранжа
(учитывается кратность) $\Pi_n(x) = (x-x_0)^{\alpha_0} (x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_m)^{\alpha_m}$
max Not $\dots$

1.7 Кубические сплайны:

$f(x)$ f_i в м. x_i , $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$

Опр. Ф-ция $S(x)$ наз-ся кубическим сплайном для ф-ции $f(x)$ по точкам x_i , если:

- 1) на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1, n}$
 $S \rightarrow$ - полином 3-ей степени
- 2) $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$ непр.
- 3) $S(x_i) = f(x_i)$, $i=\overline{0, n}$
- 4) $S''(a) = S''(b) = 0$ (или заданы значения)



Теорема Кубический сплайн, удовл.
усл-ям (1)-(4) $\exists$ и!

Δ 1) $[x_{i-1}, x_i]$: $S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + \frac{c_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x-x_i)^3$, $i=\overline{1, n}$

$$S_i'(x) = b_i + c_i(x-x_i) + \frac{d_i}{2}(x-x_i)^2, \quad i=\overline{1, n}$$

$$S_i''(x) = c_i + d_i(x-x_i), \quad i=\overline{1, n}$$

2) $S_i(x_i) = f_i$, $i=\overline{1, n}$

$$S_i(x_i) = a_i = f_i, \quad i=\overline{1, n}$$

$$3) \text{ Herm } S(x): S_i(x_{i-1}) = S_{i-1}(x_{i-1})$$

$$\quad] \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

$$S_i(x_{i-1}) = f_i - b_i h_i + c_i \frac{1}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3 = \\ = S_{i-1}(x_{i-1}) = a_{i-1} = f_{i-1}$$

$$\boxed{b_i h_i - \frac{c_i}{2} h_i^2 + \frac{d_i}{6} h_i^3 = f_i - f_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}} \quad (1)$$

$$\text{Herm } S'(x): S'_i(x_{i-1}) = S'_{i-1}(x_{i-1})$$

$$\boxed{b_i + c_i (x_{i-1} - x_i) + \frac{d_i}{2} (x_{i-1} - x_i)^2 = b_{i-1}} \\ i = \overline{2, n}$$

$$\text{Herm } S''(x): S''_i(x_{i-1}) = S''_{i-1}(x_{i-1})$$

$$\boxed{c_i + d_i (x_{i-1} - x_i) = c_{i-1}} \\ i = \overline{2, n}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2 &= b_{i-1} \\ c_i - d_i h_i &= c_{i-1} \end{aligned}} \quad i = \overline{2, n} \quad (2)$$

$$4) S''_1(x_0) = 0 \quad S''_n(x_n) = 0$$

$$S''_i(x) = c_i + d_i(x - x_i)$$

$$\Downarrow \quad c_1 + d_1(x_0 - x_1) = 0 \quad c_n = 0$$

$$\begin{cases} c_{i-1} - c_i = -d_i h_i, & i = \overline{2, n} \quad (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 - d_1 h_1 = 0 & c_n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_0 = 0 \Rightarrow c_1 - c_0 = d_1 h_1$$

$$\text{uz } (*) \Rightarrow \begin{cases} c_{i-1} - c_i = -d_i h_i, & i = \overline{1, n} \quad (3) \\ c_0 = c_n = 0 \end{cases}$$

$$(1) : \begin{cases} b_i = \frac{c_i}{2} h_i - \frac{d_i}{6} h_i^2 + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$(2) : \begin{cases} b_i - b_{i-1} = c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2, \quad i = \overline{2, n} \end{cases}$$

$$(3) : \begin{cases} \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i} = d_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad c_0 = c_n = 0 \end{cases}$$

$$b_i - b_{i-1} = c_i h_i - \frac{c_i - c_{i-1}}{2} \cdot \frac{h_i^2}{h_i} = c_i h_i - \frac{c_i}{2} h_i + \frac{c_{i-1}}{2} h_i = \frac{c_i}{2} h_i + \frac{c_{i-1}}{2} h_i$$

$$\boxed{b_i - b_{i-1} = \frac{c_i + c_{i-1}}{2} h_i} \quad i = \overline{2, n} \quad (**)$$

В 1 уравнении 3:

$$b_i = \frac{c_i}{2} h_i - \frac{1}{6} \cdot \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i} \cdot h_i^2 + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} = \frac{c_i h_i}{2} - \frac{c_i}{6} h_i + \frac{c_{i-1}}{6} h_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$\boxed{b_i = \frac{1}{3} c_i h_i + \frac{c_{i-1} h_i}{6} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}}$$

⇓

$$b_{i-1} = \frac{1}{3} c_{i-1} h_{i-1} + \frac{c_{i-2} h_{i-1}}{6} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

вычтем из (**)

$$\left[\frac{1}{3} c_i h_i + \frac{c_{i-1} h_i}{6} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{1}{3} c_{i-1} h_{i-1} - \frac{c_{i-2} h_{i-1}}{6} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right] = \frac{c_i}{2} h_i + \frac{c_{i-1}}{2} h_i, \quad i = \overline{2, n}$$

$$\left[c_i \left[\frac{1}{3} h_i - \frac{1}{2} h_i \right] + c_{i-1} \left[\frac{h_i}{6} - \frac{h_{i-1}}{3} - \frac{h_i}{2} \right] + c_{i-2} \left(-\frac{h_{i-1}}{6} \right) = -\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n} \right]$$

$$\left[\begin{aligned} & -\frac{1}{6} c_i h_i - \frac{1}{3} c_{i-1} (h_i + h_{i-1}) - \frac{1}{6} c_{i-2} h_{i-1} = \\ & = -\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n} \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} & \frac{1}{6} c_i h_i + \frac{1}{3} c_{i-1} (h_i + h_{i-1}) + \frac{1}{6} c_{i-2} h_{i-1} = F_i, \quad i = \overline{2, n} \\ & c_0 = 0, \quad c_n = 0 \end{aligned} \right.$$

$$i = \overline{2, n} \rightarrow \boxed{1, \dots, n-1}$$

$$\left[\begin{aligned} & \frac{1}{6} c_{i+1} h_{i+1} + \frac{1}{3} c_i (h_{i+1} + h_i) + \frac{1}{6} c_{i-1} h_i = \\ & = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, n-1} \\ & c_0 = 0, \quad c_n = 0 \end{aligned} \right.$$

СЛАУ с гранич. условиями
(трехдиагональная матрица)

~~$A_i y_{i-1} + C_i y_i - B_i y_{i+1} = -F_i$~~

$$\left[\begin{aligned} & -A_i y_{i-1} + C_i y_i - B_i y_{i+1} = -F_i \\ & \quad i = \overline{1, n-1} \\ & y_0 = \dots \quad y_n = \dots \end{aligned} \right.$$

метод
крайних
элементов

$$|C| > |A| + |B|$$

$$C = \frac{1}{3} (h_{i+1} + h_i) \quad A = \frac{h_{i-1}}{6}$$

$$B = \frac{h_{i+1}}{6}$$

□

T1 (Система уравнений) Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$:
 $\forall$ разбиения: $h = \max x_i h_i < \delta \Rightarrow |f(x) - S(x)| < \varepsilon$
 $\forall x \in [a, b]$

Δ без гон-ва □

Т.2 (Скорость сходимости) Пусть $f(x)$ имеет на $[a, b]$ 4 непрерыв. производные, тогда $|f(x) - S(x)| \leq M_4 h^4$; $|f'(x) - S'(x)| \leq M_4 h^3$;

$$|f''(x) - S''(x)| \leq M_4 h^2, \quad \forall x \in [a, b],$$

где $M_4 = \max_{[a, b]} f^{(4)}(x)$

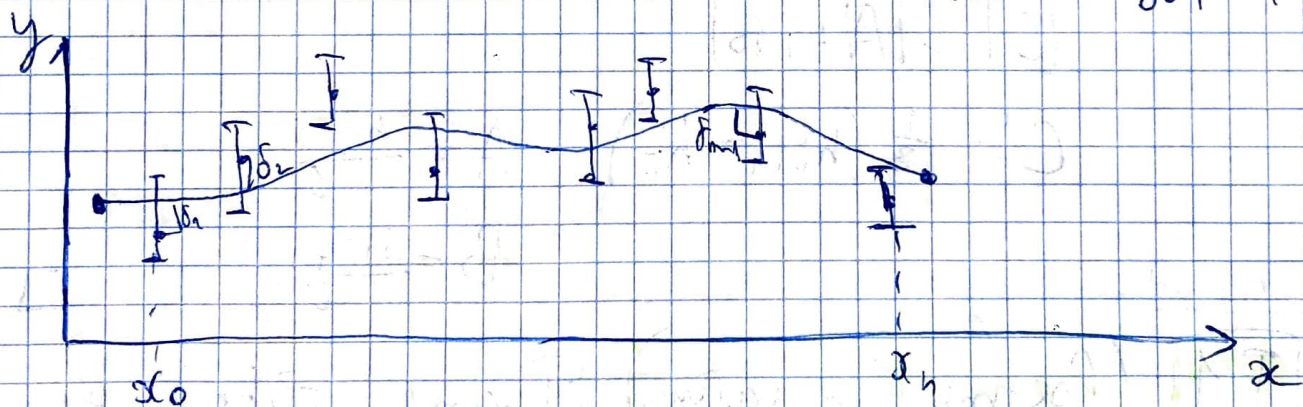
Δ без гок-ва □

$$S(x) = S_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

сам стилин

П.8 Метод наименьших квадратов

Дано: $y = f(x)$; $x_0, x_1, \dots, x_n$
 $f(x_0) \dots f(x_n) \Leftrightarrow y(x_0) \dots y(x_n)$
 $(f_0 \dots f_n) \Leftrightarrow y_0, \dots, y_n$



$x_0 \dots x_n$

$f_0 \dots f_n (y_0 \dots y_n)$

Выберем ор-уни: $\varphi_k(x)$, $k=0,1,\dots,m$
 $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$; $m \leq n$

Зам: обычно $m \ll n$

Задача: Аппроксимировать (не интерполи-
ровать) $y(x)$ с помощью ор-уни:

$$F(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x)$$

a_k — подлежат определению

Зам: требование $f(x_i) = F(x_i)$
откажемся! (не интер-)

$$F(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x)$$

Способ выбора a_k : (метод)

$$\delta_i = y_i - F(x_i) = y_i - \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x_i), \quad i = \overline{0, n}$$

Опр: Суммарной квадратичной погрешностью назовём величину J :

$$J = \sum_{i=0}^n \delta_i^2 = \sum_{i=0}^n \left[y_i - \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x_i) \right]^2$$

Задача: найти $a_0, \dots, a_m$: $J \rightarrow \min$
исходя $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_m$ достигают $\min J$
 $\min J(a_0, \dots, a_m)$

Опр: $F(x)$ с таким набором коэффициентов $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_m$ наз-ся наилучшим среднеквадратичным

приближением по данной сис-ме ф-ций $\varphi_k(x)$ и по данному набору точек $x_0, \dots, x_n$.

1) Найти $\min J(a_0, \dots, a_m)$

Необх. условие экстремума:

$$\frac{\partial J}{\partial a_l} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_l} = -2 \sum_{i=0}^n \left\{ \left[y_i - \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x_i) \right] \varphi_l(x_i) \right\} = 0, \quad l = \overline{0, m}$$

$$\sum_{i=0}^n y_i \varphi_l(x_i) - \sum_{i=0}^n \left[\sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) \right] = 0$$

$$\sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^n a_k \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_l(x_i), \quad l = \overline{0, m}$$

$$\sum_{k=0}^m a_k \underbrace{\left(\sum_{i=0}^n \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) \right)}_{\gamma_{lk}} = \underbrace{\sum_{i=0}^n y_i \varphi_l(x_i)}_{b_l}, \quad l = \overline{0, m}$$

$$\sum_{k=0}^m a_k \gamma_{lk} = b_l, \quad l = \overline{0, m} \quad - \text{СИСТ}$$

$$\gamma_{lk} = \sum_{i=0}^n \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i); \quad b_l = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_l(x_i)$$

Матрица этой системы $\Gamma = \{\gamma_{lk}\} \rightarrow$
 $\rightarrow$ матрица Грамма для функций $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ по точкам $x_0, \dots, x_n$

Зам: Γ - симметричная, $\gamma_{lk} = \gamma_{kl}$

Увн: Если $\det \Gamma \neq 0$, то решение
отн. $a_0, \dots, a_m \exists$ и! $\Rightarrow \exists$ и! набор

$\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ $\frac{\partial F}{\partial a_\ell} \Big|_{\bar{a}_\ell} = 0$, $\ell = 0, m$
 (м.е. точки, соответствующие на экстремуму
 функции)

② Показать, что при этом $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \rightarrow \min J$

$$] a_0 = \bar{a}_0 + \Delta a_0, \dots, a_m = \bar{a}_m + \Delta a_m$$

Показать, что: $J(a_0, \dots, a_m) \geq J(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_m)$
 $|\Delta a_0| + \dots + |\Delta a_m| \neq 0$

$$\delta_i^2 = \left[y_i - \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x_i) \right]^2 =$$

$$= \left[y_i - \sum_{k=0}^m (\bar{a}_k + \Delta a_k) \varphi_k(x_i) \right]^2 \ominus$$

$$J \neq \sum_{i=0}^n \delta_i^2$$

$$\ominus \left[\left(y_i - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right) - \sum_{k=0}^m \Delta a_k \varphi_k(x_i) \right]^2 =$$

$$= \left[y_i - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right]^2 - 2 \left[y_i - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right] \cdot$$

$$\left[\sum_{k=0}^m \Delta a_k \varphi_k(x_i) \right] + \left[\sum_{k=0}^m \Delta a_k \varphi_k(x_i) \right]^2$$

$$J = \sum_{i=0}^n \delta_i^2$$

$$\textcircled{3} a) \sum_{i=0}^n \left[y_i - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right]^2 = J(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_m)$$

$$b) \underbrace{\sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^m \Delta a_k \varphi_k(x_i) \right)^2}_{A} \geq 0$$

A

$$\begin{aligned}
 b) & -2 \sum_{i=0}^n \left\{ \left[y_i - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right] \left[\sum_{l=0}^m \Delta a_l \varphi_l(x_i) \right] \right\} = \\
 & = -2 \left\{ \sum_{i=0}^n y_i \sum_{l=0}^m \Delta a_l \varphi_l(x_i) - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \sum_{l=0}^m \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) \right\} = \\
 & = -2 \left\{ \sum_{l=0}^m \Delta a_l \underbrace{\left(\sum_{i=0}^n y_i \varphi_l(x_i) \right)}_{b_l} - \sum_{l=0}^m \Delta a_l \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^n \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) \bar{a}_k \right\} = \\
 & = -2 \left\{ \sum_{l=0}^m \Delta a_l \left[b_l - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \sum_{i=0}^n \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) \right] \right\} = \\
 & = -2 \left\{ \sum_{l=0}^m \Delta a_l \left[b_l - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \gamma_{lk} \right] \right\} \quad \gamma_{lk} \\
 & \quad \quad \quad 0 \text{ (т.к. уз системы)}
 \end{aligned}$$

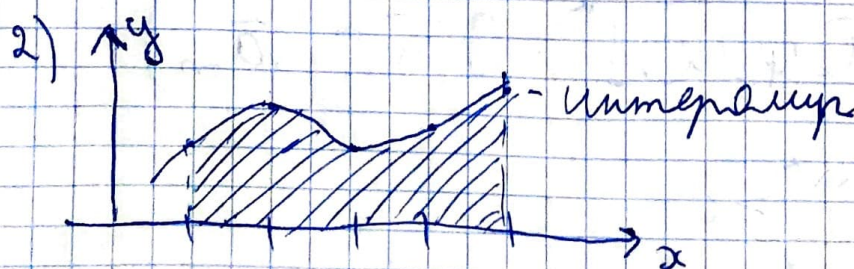
$$\Rightarrow J(a_0, \dots, a_m) = J(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_m) + A, \quad A \geq 0$$

Задача 3.

Численное интегрирование.

$$[a, b] \quad f(x) \quad I = \int_a^b f(x) dx$$

$$1) \int e^{-x^2} dx \quad \int \frac{\sin x}{x} dx \quad \dots \quad - \text{ не найдем выражения по формуле - Лебнцу}$$



Квадратурные ф-лы:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) + R_n$$

$$x_i \in [a, b] \quad a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$$

R_n - погрешность (остаточный член)

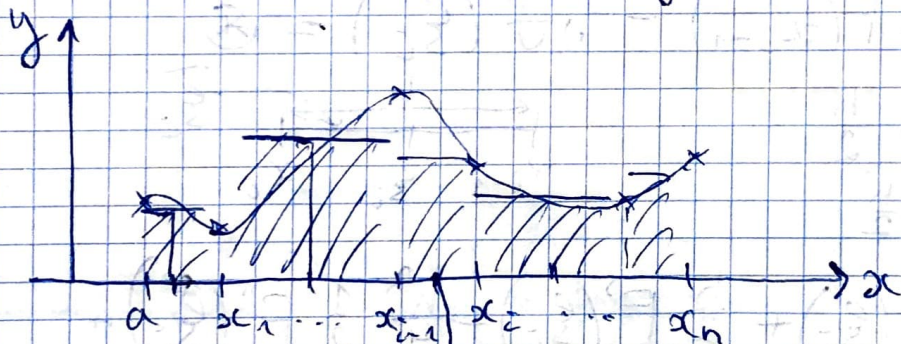
$c_i \rightarrow$ углы из условия макс. близости к значению I : $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$I \approx \sum_{i=0}^n c_i f(x_i)$$

αR_n - ошибка (погрешность)

§ 1. Форм-лы прямоугольников, трапеций, парабол (ф-ла Симпсона).

П. 1. Форм-лы прямоугольников



$$\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^n [\text{квдр.} + \text{ост. член}]$$

$$1) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \stackrel{\text{матр}}{=} f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) + R_i$$

$$\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

Зам: Сетка равномерн: $x_i = a + ih$, $x_i = x_{i-1} + h$,
 h - шаг сетки ($h \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$)
 $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = h f(\xi_i) + \bar{R}_i, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^n f(\xi_i) + R_n$$

$$R_n = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i, \quad \xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

2) Оценка погрешности R_n

Пусть $f(x)$ имеет вторую непрерывную производную

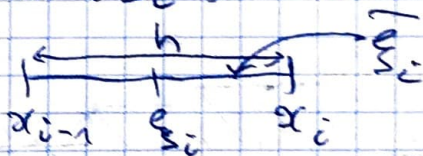
$$\bar{R}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - h f(\xi_i) = \{ F(x) - \text{непродвижная } f(x) \} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - h f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$F(x_i) - F(x_{i-1})$$

$$\Leftrightarrow F(x_i) - F(x_{i-1}) - h f(\xi_i) = \circledast$$

$$x_i = \xi_i + \frac{h}{2}$$

$$x_{i-1} = \xi_i - \frac{h}{2}$$



$$F(x_i) = F(\xi_i) + \frac{h}{2} F'(\xi_i) + \frac{h^2}{4} \cdot \frac{1}{2} F''(\xi_i) + \frac{h^3}{8} \cdot \frac{1}{6} F'''(\bar{\xi}_i)$$

$$F(x_{i-1}) = F(\xi_i) - \frac{h}{2} F'(\xi_i) + \frac{h^2}{8} F''(\xi_i) - \frac{h^3}{48} F'''(\bar{\eta}_i)$$

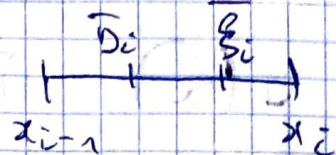
$$\circledast = F(\xi_i) + \frac{h}{2} F'(\xi_i) + \frac{h^2}{8} F''(\xi_i) + \frac{h^3}{48} F'''(\bar{\xi}_i) -$$

$$- \left[F(\xi_i) - \frac{h}{2} F'(\xi_i) + \frac{h^2}{8} F''(\xi_i) - \frac{h^3}{48} F'''(\bar{\eta}_i) \right] -$$

$$- h f(\xi_i) = \underbrace{h F'(\xi_i)}_{h f(\xi_i)} + \frac{h^3}{48} (F'''(\bar{\xi}_i) + F'''(\bar{\eta}_i))$$

$$- h f(\xi_i) = \bar{R}_i$$

$$\bar{R}_i = \frac{h^3}{48} (f''(\xi_i) + f''(\bar{\eta}_i)) =$$



$$= \{ \exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] : f''(\xi_i) = \frac{f''(\xi_i) + f''(\bar{\eta}_i)}{2} \} \quad \text{⊕}$$

$$m = \frac{m+m}{2} \leq \frac{f''(\xi_i) + f''(\bar{\eta}_i)}{2} \leq \frac{M+M}{2} = M \Rightarrow \text{0 максимум не меньше}$$

$$\text{⊖} \quad \frac{h^3}{48} f''(\xi_i) \cdot 2 = \frac{h^3}{24} f''(\xi_i)$$

$$3) R_n = \sum_{i=1}^n \frac{h^3}{24} f''(\xi_i) = \frac{h^3}{24} [f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_n)] = \text{логично и правильно так } h^3,$$

$$\text{и } \exists \xi \in [a, b] : f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_n)}{n}$$

$$= \frac{h^3}{24} \cdot n f''(\xi)$$

$$\Rightarrow R_n = \frac{h^3}{24} n f''(\xi), \quad h = \frac{b-a}{n}$$

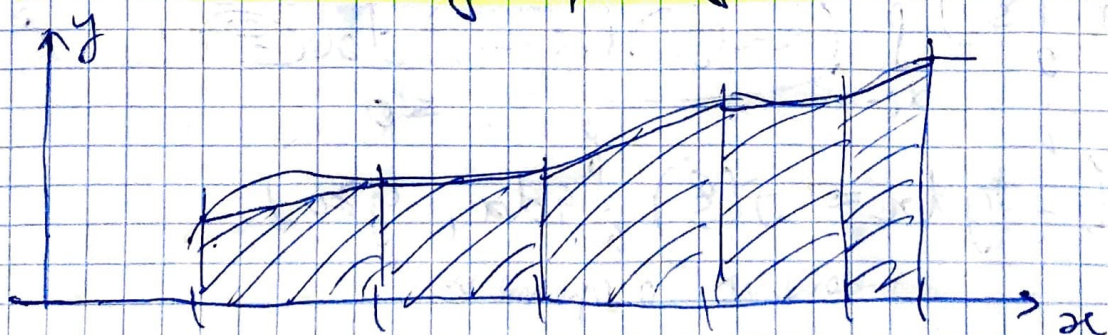
$$R_n = \frac{h^2}{24} (b-a) f''(\xi)$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^n f(\xi_i) + R_n$$

$$1) h \rightarrow 0 \Rightarrow R_n \rightarrow 0$$

$$2) R_n = O(h^2) \rightarrow \text{2 порядка по } h$$

П.2. Метод трапеций.



$f(x)$ $[x_{i-1}, x_i] \rightarrow$ непрерывный
на нем $P_1(x)$

$$P_1(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1})$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [P_1(x) + R_{P_1}] dx =$$

$$= \int_a^b \{ f(x) - P_1(x) \} dx =$$

$$= \underbrace{\int_a^b P_1(x) dx}_{\text{квadr}} + \underbrace{\int_a^b R_{P_1} dx}_{R_n}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_1(x) dx + \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} R_{P_1} dx}_{R_i}$$

$$a) \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_1(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) \right] dx =$$

$$= h f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} =$$

$$= h f_{i-1} + \left(\frac{f_i}{h} - \frac{f_{i-1}}{h} \right) \frac{h^2}{2} = \frac{f_i}{2} h + \frac{f_{i-1}}{2} h =$$

$$= \frac{h}{2} (f_i + f_{i-1})$$

$$b) f(x) = P_1(x) + \underbrace{\frac{f''(\xi_i)}{2} (x - x_{i-1})(x - x_i)}_{\text{но гр. не вып. непрерыв}}$$

$$R_i = \frac{f''(\xi_i)}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})(x - x_i) dx \stackrel{\leq 0}{=}$$

$$\left(\int_a^b f g dx = f(\xi) \int_a^b g dx, g \geq 0 \right)$$

непрерыв и выпукл

$$\begin{aligned} \int_0^h t(t-h) dt &= \frac{f''(\bar{\xi}_c)}{2} \left(\frac{t^3}{3} - h \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^h = \\ &= \frac{f''(\bar{\xi}_c)}{2} \left[\frac{h^3}{3} - \frac{h h^2}{2} \right] = -\frac{1}{12} f''(\bar{\xi}_c) h^3 = R_c \end{aligned}$$

$$= -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$R_h = -\frac{h^2}{12} f''(\xi) (b-a)$$

$$R_3 = \underline{0} (h^2)$$

$$f(x) \quad [x_{j_1}, x_{j_2}]$$

Diagram illustrating a line segment with points x_{2j-2} , x_{2j-1} , and x_{2j} marked. Below the segment, the index j is defined as $j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$.

$$P_2(x) = f_{2j-2} \frac{(x-x_{2j-1})(x-x_{2j})}{\underbrace{(x_{2j-2}-x_{2j-1})}_{-h} \underbrace{(x_{2j-2}-x_{2j})}_{-2h}} +$$

$$+ f_{2j-1} \frac{(x-x_{2j-2})(x-x_{2j})}{\cancel{(x_{2j-1}-x_{2j-2})} \underbrace{(x_{2j-1}-x_{2j-2})}_{h} \underbrace{(x_{2j-1}-x_{2j})}_{-h}} +$$

$$+ f_{2j} \frac{(x-x_{2j-1})(x-x_{2j-2})}{\underbrace{(x_{2j}-x_{2j-1})}_{h} \underbrace{(x_{2j}-x_{2j-2})}_{2h}} \quad \text{--- un peu plus h}$$

$$\int_a^b f dx$$

$$\int_a^b (P_2 + R_{P_2}) dx$$

$$\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} P_2(x) dx =$$

$$1) \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f_{2j-2} \frac{(x-x_{2j-1})(x-x_{2j})}{2h^2} dx =$$

$$= \frac{f_{2j-2}}{2h^2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} (x-x_{2j-1})(x-x_{2j}) dx = \left[t = x - x_{2j-2}, \right. \\ \left. x = t + x_{2j-2} \right] =$$

$$= \frac{f_{2j-2}}{2h^2} \int_0^{2h} \left(t + \underbrace{x_{2j-2}-x_{2j-1}}_{-h} \right) (t + x_{2j-2} - x_{2j}) dt =$$

$$= \frac{f_{2j-2}}{2h^2} \int_0^{2h} (t-h)(t-2h) dt =$$

$$= \frac{f_{2j-2}}{2h^2} \int_0^{2h} [t^2 - 3ht + 2h^2] dt =$$

$$= \frac{f_{2j-2}}{2h^2} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}ht^2 + 2h^2t \right]_0^{2h} =$$

$$= \frac{f_{2j-2}}{2h^2} \left[\frac{8h^3}{3} - \frac{12}{2}h^3 + 4h^3 \right] =$$

$$= \frac{2}{3}h^3 f_{2j-2} \cdot \frac{1}{2h^2}$$

$$2) \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f_{2j-1} \frac{(x-x_{2j-2})(x-x_{2j})}{-h^2} dx = -\frac{4}{3}h^3 \cdot f_{2j-1} \left(-\frac{1}{h^2}\right)$$

$$3) \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f_{2j} \frac{(x-x_{2j-1})(x-x_{2j-2})}{2h^2} dx = \frac{2}{3}h^3 \cdot f_{2j} \cdot \frac{1}{2h^2}$$

$$\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} P_2(x) dx = \frac{1}{3}h^3 f_{2j-2} \frac{1}{h^2} + \frac{4}{3}f_{2j-1} \frac{h^3}{h^2} +$$

$$+ \frac{1}{3}h^3 f_{2j} \cdot \frac{1}{h^2} = \frac{h}{3} [f_{2j-2} + 4f_{2j-1} + f_{2j}]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^N \frac{h}{3} [f_{2j-2} + 4f_{2j-1} + f_{2j}] + \underline{\underline{R_n}}$$

$$\int f = \int P_2 + \int R_{P,2} \text{ - nap. umm. um-na}$$

$$\int R_{P,2} = \int \frac{f^{(3)}(\xi) (x-x_{2j-2})(x-x_{2j-1})(x-x_{2j})}{3!} dx$$

↑ umm. haben 0
(ne zurechenbar)

$$[x_{2j-2}, x_{2j}] \rightarrow [x_{2j-2}, x_{2j-1}], [x_{2j-1}, x_{2j}]$$

Wegsumme:

$$\int_{-c}^c f(x) dx = \underbrace{\quad}_{\text{Summe}} + R, \quad R = \frac{f^{(4)}(\xi) (2c)^5}{2880}$$

$$\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f dx = \underbrace{\quad}_{\text{Summe}} + R_j, \quad c = h$$

$$R = \frac{f^{(4)}(\xi_j) (2h)^5}{2880} =$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi_j) h^5}{90}$$

$$R_j = \frac{f^{(4)}(\xi_j)}{90} h^5$$

$$R_n = \sum_{j=1}^n \frac{f^{(4)}(\xi_j)}{90} h^5 = \frac{1}{90} h^5 \cdot f^{(4)}(\xi) \cdot \frac{n}{2} \Rightarrow$$

$\exists \xi \uparrow$

$$R_n = \frac{h^5}{180} \underset{\frac{b-a}{n}}{n} f^{(4)}(\xi) = \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi) (b-a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \sum_{j=1}^n [f_{2j-2} + 4f_{2j-1} + f_{2j}] + R_n$$

$$R_n = \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi) (b-a) = O(h^4)$$

§2 Квадратурные ф-лы Гаусса

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) + R_n$$

$i = \overline{1, n}$

Известно x_i - даны заранее $\rightarrow$ известны c_i : $R_n \rightarrow 0$

• Известно c_i и можно найти x_i

Примерный вид: Квадратурная ф-ла Гаусса точно верна ($R_n = 0$) для ф-ций, которые являются полиномом степени до $2n-1$ включительно $\Rightarrow \{c_i\}, \{x_i\}, i = \overline{1, n}$
 $f(x) = 1, f(x) = x, \dots, f(x) = x^{2n-1} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall Q_{2n-1}(x)$ - полином ст. $2n-1$

$f(x)$ приближено с заданной точностью ε
 $Q_m(x): |f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon$

1) $f=1$ 2) $f=x$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{m+1} [1 - (-1)^{m+1}] \quad , m=0, 1, 2, \dots, 2n-1$$

$$m=0: \sum_{i=1}^n c_i x_i^0 = \frac{1}{1} [1+1] = 2$$

$$\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = 2 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0 \end{cases}$$

$$m=2n-1: c_1 x_1^{2n-1} + c_2 x_2^{2n-1} + \dots + c_n x_n^{2n-1} = \frac{1}{2n} (1 - (-1)^{2n})$$



$[c_2, x_2]$

Pycm6: $n=1 \quad c_2=2$

$$c_1 x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2f(0) + \underline{R_n}$$

$$n=2: \quad c_1, c_2, x_1, x_2$$

$$2n-1=3 \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \\ c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0 \end{cases}$$

П.2. Степенная аппроксимация:

Степ. аппроксимация универсальна. Базис:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$$

нормы на $(-1, 1)$
ортогональные функции:
 $[-1, 1]$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{2} 2x = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4 \cdot 2!} \frac{d^2}{dx^2} [(x^2-1)^2] = \frac{1}{8} \frac{d^2}{dx^2} (x^4 - 2x^2 + 1)$$

$$= \frac{1}{8} (4 \cdot 3x^2 - 4) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} (=0) \Rightarrow$$

$$x^2 = 3^{-1}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ch-ba:

$$1^{\circ}) P_n(-x) = P_n(x) (-1)^n$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^{2n} + nx^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{2} x^{2n-4} \right]$$

a) $n \rightarrow$ четное: $\frac{d^n}{dx^n}$ сбалансировано в нуле — не только четные слагаемые: $P_n(-x) = P_n(x)$

b) $n \rightarrow$ нечетное: сбалансировано только нечетные слагаемые $\Rightarrow P_n(-x) = -P_n(x)$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$2^{\circ}) P_n(x)|_{x=1} = P_n(1) = 1 \Rightarrow P_n(-1) = (-1)^n P_n(1)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x+1)^n (x-1)^n]$$

$$= \text{по формуле Лейбница} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n C_n^k [(x+1)^n]^{(k)} [(x-1)^n]^{(n-k)} =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (x+1)^{n-k} n(n-1) \dots (n-k+1) \cdot$$

$$\cdot (x-1)^k \cdot n(n-1) \dots (k+1) =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n! \cdot n!}{k! (n-k)!} (x+1)^{n-k} (x-1)^k =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 n! (x+1)^{n-k} (x-1)^k = (*)$$

$P_n(x)|_{x=1}$ при $x=1$ $(x-1)^0 \neq 0$

$$(*) = P_n(x)|_{x=1} = \{ \text{при } k=0 \} =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} n! \cdot 2^n = 1$$

$$P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n$$

3°) Показано, что многочлен $P_n(x)$ имеет на $(-1, 1)$ n простых корней и эти корни симметричны относительно 0

$$\text{из } (1) \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$g(x) = (x^2 - 1)^n$$

1) $g(x) = (x^2 - 1)^n \Rightarrow$ имеет дв. корни

$$\downarrow \quad g(x) = 0 \quad \text{в двух точках}$$

$$\text{т. Лемма} \Rightarrow g'(x) = 0 \quad \text{в т. } \xi_1: -1 < \xi_1 < 1$$

$$2) \quad g'(x) = n(x^2 - 1)^{n-1} \cdot 2x = 0$$

$$x=1, x=-1, x=\xi_1 \Rightarrow \text{три точки}$$

$$\downarrow \quad \text{т. Лемма} \Rightarrow g''=0:$$

$$-1 < \xi_{21} < \xi_{22} < 1$$

$$3) \quad g''=0 \quad : \quad -1, \xi_{21}, \xi_{22}, 1 \dots$$

$$n \cdot ((x^2 - 1)^n)^{(n)} = 0 \quad \text{в } n \text{ точках} \Rightarrow n \text{ корней}$$

4°) Сб-во: $\forall$ полином степени m $Q_m(x)$

$m < n$ ортогонален $P_n(x)$: на $[-1; 1]$

$$Q_m(x) \perp P_n(x), \quad \forall m < n$$

$$\boxed{\int_{-1}^1 Q_m(x) P_n(x) dx = 0} \quad m < n$$

$\frac{1}{2^n n!}$ не равно

$$\int_{-1}^1 Q_m(x) \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] dx$$

$$= Q_m(x) \underbrace{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2-1)^n]}_{=0} \Big|_{-1}^1 - \quad (1)$$

$$- \int_{-1}^1 \frac{dQ_m(x)}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2-1)^n] dx =$$

$$= (-1)^1 \int_{-1}^1 \frac{dQ_m(x)}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2-1)^n] dx =$$

$$= (-1)^1 \left[\underbrace{\frac{dQ_m(x)}{dx} \cdot \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(x^2-1)^n]}_{=0} \Big|_{-1}^1 + \quad (2)$$

$$(-1)^2 \int_{-1}^1 \frac{d^2 Q_m(x)}{dx^2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(x^2-1)^n] dx =$$

$$= (-1)^2 \int_{-1}^1 \frac{d^2 Q_m(x)}{dx^2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(x^2-1)^n] dx =$$

$$= \dots =$$

$m+1$ раз:

$$= (-1)^{m+1} \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} Q_m(x)}_{=0} \cdot \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} [(x^2-1)^n] dx =$$

$$= 0!!$$

$$\forall Q_m(x), \quad m < n \Rightarrow Q_m(x) \perp P_n(x)$$

Уте: $\forall$ ортонормированные многочлены $P_m(x) \perp P_n(x)$
 $m \neq n$

Пример: $\sin nx, \cos mx$. $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$ $n \neq m$

Ж.З. Узун и коллар. кубаграммлар Гаусса

$$\int_{-1}^1 x^p dx = \sum_{i=1}^n C_i x_i^p, \quad p=0, 1, \dots, 2n-1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 Q_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^n Q_{2n-1}(x_i) C_i$$

1) Қалай. соохранение:

$$\forall Q_m(x), m < n,$$

$$W_n = (x - x_1) \dots (x - x_n),$$

$x_1, \dots, x_n \rightarrow$ корини наиниша лансагра

$\Rightarrow W_n(x)$ с мон. го инвариант - наиниша

$$\int_{-1}^1 Q_m(x) W_n(x) dx = 0 = \int_{-1}^1 m \cdot x \cdot W_n(x) dx = 0$$

$$= \int_{-1}^1 Q_{m+n}(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i Q_{m+n}(x_i) = 0$$

$\swarrow$ $\searrow$
 генеро сума
 $P_m(x_i) W_n(x_i)$
 "0"

$$m+n \leq 2n-1$$

Булбуг: Булбуг сума в наестике узлов $x_i \rightarrow$ корин наиниша лансагра

2) $P_m(x) \rightarrow \forall$ наиниша сменени $m = n-1$

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n P_{n-1}(x_i) \cdot Q_{n-1,i}(x) \quad \Leftrightarrow m < n$$

$$Q_{n-1,i}(x) = \frac{(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}$$

$$Q_{n-1,i}(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 P_{n-1}(x) dx = \sum_{i=1}^n P_{n-1}(x_i) \int_{-1}^1 Q_{n-1,i}(x) dx$$

$$c_i = \int_{-1}^1 Q_{n-1,i}(x) dx, \quad i=1, \dots, n$$

$$\int_{-1}^1 P_{n-1}(x) dx = \sum_{i=1}^n P_{n-1}(x_i) c_i$$

Уточн: ф-ла для коэфф. c_i и самих x_i найдем и они обеспечат нам возможность ф-ла Гаусса для $\forall m < n$

③ $\forall P_{2n-1}(x)$

Пусть $L_n(x) \rightarrow$ наименьший многочлен с нулями $x_i, i=\overline{1, n}$

$$P_{2n-1}(x) = q_{n-1}(x) L_n(x) + r_{n-1}(x)$$

$n-m$
степени
в остатке

$q_{n-1}(x), r_{n-1}(x)$ — наим. степени $n-1$

Заметим, что $L_n(x) \perp q_{n-1}(x)$

④
$$\int_{-1}^1 P_{2n-1}(x) dx = \int_{-1}^1 q_{n-1}(x) L_n(x) dx + \int_{-1}^1 r_{n-1}(x) dx = \underbrace{\int_{-1}^1 q_{n-1}(x) L_n(x) dx}_{=0} + \int_{-1}^1 r_{n-1}(x) dx = \int_{-1}^1 r_{n-1}(x) dx = \text{нормал.}$$

к ф-ле Гаусса

$$= \sum_{i=1}^n c_i r_{n-1}(x_i) = \sum_{i=1}^n (c_i \cdot 0 + c_i) r_{n-1}(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{q_{n-1}(x_i) L_n(x_i)}_{=0} + r_{n-1}(x_i) \right) c_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n P_{2n-1}(x_i) C_i - \text{op-va Taycca}$$

В нарисованном узоре $\Rightarrow x_i$ - корни многочлена

$$C_i = \int_{-1}^1 Q_{n-1,i}(x) dx, \quad i=1, \dots, n$$

Пример: $n=2 \quad L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = 0$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$C_1, C_2 = 1$$

$$C_1 = \int_{-1}^1 Q_{1,1}(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx$$

$$C_2 = \int_{-1}^1 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Зам. 1) $\int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_{-1}^1$

$$[a, b] \rightarrow [-1, 1], \quad x = \alpha t + \beta$$

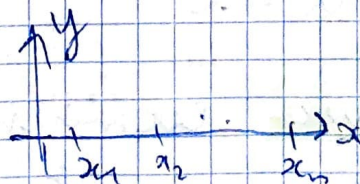
$$a = -\alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \frac{b-a}{2}$$

$$b = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = \frac{b+a}{2}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt \cdot \frac{b-a}{2}$$

Зам. 2 $f(x) [a, b]$

$$[x_{i-1}, x_i]$$



$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

но Taycca, напр. при $n=2$.

$$= \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2} t + \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) dt \frac{x_i - x_{i-1}}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(f\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \right) \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$$

Зам. 3: Всё это работает, если есть возможность вычислить $f(x)$ в заданных точках

Глава 4.

Численные решения ОДУ

§1. Точные ф-ции, аппроксимация

П.1. Постановка задачи

$u(x)$ - непрерывного аргумента

$u(x)$ - нек-е, к-е число дифер-мы

1) $x \in \Omega$

2) $u(x)$

3) Правая часть $f(x, u(x))$

4) Диф-ый оператор L

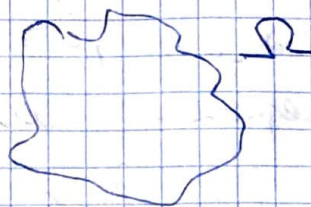
$$Lu(x) = f(x, u(x)), x \in \Omega$$

$$\begin{cases} u'' - u^2 = x & \uparrow, 0 < x \\ Lu = u'' - u^2 \\ f = u^2 + x \end{cases}$$

Решение: состоит в нахождении $u(x)$ во всех или заданных точках x .

Решения задачи:

$$x \in \Omega$$
$$u(x)$$



$$x_n \in \Omega_n$$
$$u(x_n)$$



$$u(x) \rightarrow u_n(x_n)$$

$L_n = \dots$ — дискретная система

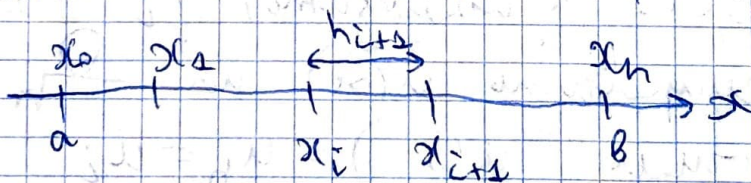
11.2. Сетка, сеточное р-уи.

$[a, b] = \Omega$, решаем ОДУ

Опр: Зададим на $[a, b]$ набор точек:

$$x_i: a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

$$x_{i+1} = x_i + h_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}$$



Набор точек $\{x_i\}$ будем называть сеткой
 $h_i \rightarrow \max$ сетки

1) $h_i, i = \overline{1, n}$ — разные $\Rightarrow$ не равн. сетка

2) $h_i = h, i = \overline{1, n}$ — равн. $\Rightarrow$ равн. сетка

$$\text{если } x_0 = a, x_n = b \Rightarrow h = \frac{b-a}{n}$$

Опр: Пусть каждому $x_i \in \{x_i\}$ сопоставлено и един. значение $y_i, i = \overline{0, n}$.
Совокупность $\{y_i\}$ будем называть сеточной р-уи.

Зам 1: Сем. ф-ций, определенных на мн-ве $\{x_i\}$, $i = \overline{0, n}$ образуют $(n+1)$ -мерное линейное пр-во:
 $\{y_i\} \in E^{n+1}$

Зам 2: Это пр-во $\rightarrow$ изоморф.

Пример: $\|y\|_C = \max_{0 \leq i \leq n} |y_i|$
 $\|y\|_{L_2} = \left(\sum_{i=0}^n y_i^2 h_i \right)^{\frac{1}{2}}$

В гур-м пр-е есть
 $\Rightarrow \begin{cases} u(x), & x \in \Omega & (x \in [a, b]) \\ y_i, & x_i \in \Omega_n & (x_i \in [a, b]) \end{cases}$

Сравн. $u(x)$ и y_i :

- 1) Интерп. (приблизить) y_i - непрерыв. ф-цией
- 2) Спроецировать $u(x)$ на Ω_n (по x_i) $\rightarrow$ получить $u(x_i) = u_n = u_i$ (V)
 $\Rightarrow$ можно срав. u_i и y_i

Итого: Задача:

Построить такие пр-ые для нахождения величин y_i , $i = \overline{0, n}$, чтобы значение y_i были как можно ближе близки к $u(x_i) = u_i$ пр-е для y_i .

$L_n y_i \rightarrow$ точный аналог гур-дифференциального оператора

$$Lu(x) = F(x, u(x))$$

↓

$$L_h y_i = F_h(x_i, y_i) \rightarrow \text{дискретная сис-ма}$$

$i = \overline{0, n}$

Пример: $f = e^x$

↓

$$f_h = e^{x_i} \text{ или } f_h = \frac{e^{x_i} + e^{x_{i+1}}}{2}$$

Опр: Степенью разностной схемы наз-ся наиб. величина (сложная ф-ия):

$$z_i = u(x_i) - y_i = u_i - y_i$$

Опр: Степень раз-ос. сх-мы к решению задан, если $\|z\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $h = \max_i |h_i|$

Опр: Степенью аппроксимации оператора разностной сх-мы наз-ся велич-на:

$$\psi_i = (Lu)_i - L_h u(x_i), \quad i = \overline{0, n}$$

возьмем в конце.

Пример: $Lu = \frac{du}{dx}$ $L_h y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$

$$\psi_i = \frac{du}{dx}(x_i) - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$$

Опр: Степенью аппроксим. явной раз-ос. наз-ся велич-на: $\psi_i = f(x_i, u(x_i)) - f_h(x_i, u(x_i))$

$$(Lu = f)_i$$

$$L_h y_i = f_{hi} \leftarrow y_i \rightarrow u_i$$

$$\underbrace{(Lu)_i - L_h u_i}_{\psi_i} = \underbrace{f_i - f_{hi}}_{\varphi_i}$$

$$\Phi = \psi_i - \varphi_i \quad \text{или} \quad \Phi = \varphi_i - \psi_i$$

Опр: Стойкость аппр. имеет порядок m, k если

$$\|\psi\| = O(h^m) \quad h = \max_i h_i$$

$$\|\varphi\| = O(h^k)$$

Опр: ^{норм} Все-ма имеет устойчивость (точность) порядка p , если

$$\|z\| = \|u(x_i) - y_i\| = O(h^p)$$

§2. Разностная аппроксимация первой и второй производной

П.1. Первая производная

$$\frac{du(x)}{dx} = u'(x)$$

Будем использовать равн. сетку $[a, b]$, $x_i = a + ih$, $i = \overline{0, n}$

$$u'(x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x}$$

$$u'(x_i) \rightarrow L_h^+ y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad - \text{прав. разн. - разность}$$

$$L_h^- y_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad - \text{лев. разн. - разность}$$

$$L_h^0 y_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad - \text{центр. разн. - разность}$$

$$\psi_i = (Lu)_i - L_h u_i$$

$$\textcircled{1} L_h^+ y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$\psi_i = (Lu)_i - L_h^+ u(x_i) = u'(x_i) - \frac{1}{h} [u(x_{i+1}) - u(x_i)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{прав. разн.} \\ \text{в м. } x_i \end{array} \right\} =$$

$$= u'(x_i) - \frac{1}{h} [u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \underline{O}(h^3) - u(x_i)] = u'(x_i) - \frac{1}{h} [hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \underline{O}(h^3)] =$$

$$= u'_i - u'_i - \frac{h}{2} u''_i + \underline{O}(h^2) = -\frac{h}{2} u''_i + \underline{O}(h^2)$$

$$\psi_i = -\frac{h}{2} u''_i + \underline{O}(h^2) = \underline{O}(h)$$

$$\textcircled{2} L_h^- y_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad \text{левая операция с шагом на единицу}$$

$$\psi_i = (Lu)_i - L_h^- u_i = u'(x_i) - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h} =$$

$$= u'(x_i) - \frac{1}{h} [u(x_i) - u(x_i - h)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{прав. разн.} \\ \text{в м. } x_i \end{array} \right\} =$$

$$= u'(x_i) - \frac{1}{h} [u(x_i) - (u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \underline{O}(h^3))] = u'_i - \frac{1}{h} [hu'_i - \frac{h^2}{2} u''_i + \underline{O}(h^3)] =$$

$$= \frac{h^2}{2} u''_i + \underline{O}(h^2)$$

$$\psi_i = \frac{h^2}{2} u''_i + \underline{O}(h^2) = \underline{O}(h)$$

③ Угловое вып-е

$$L_h^0 y_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$\psi_i = (Lu)_i - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} =$$

$$= u'(x_i) - \frac{1}{2h} [u(x_i+h) - u(x_i-h)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{ф-ла Тейлора} \\ \text{в макс} \end{array} \right.$$

$$= u'_i - \frac{1}{2h} \left[u'_i + hu'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + \frac{h^3}{6} u'''_i + O(h^4) \right]$$

$$- \left[u'_i - hu'_i + \frac{h^2}{2} u''_i - \frac{h^3}{6} u'''_i + O(h^4) \right] =$$

$$= u'_i - \frac{1}{2h} \left[2hu'_i + \frac{h^3}{3} u'''_i + O(h^4) \right] =$$

$$= -\frac{h^2}{6} u'''_i + O(h^3)$$

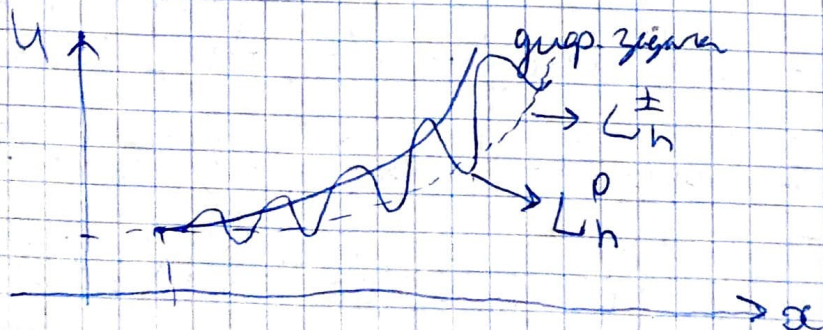
$$\boxed{\psi_i = -\frac{h^2}{6} u'''_i + O(h^3) = O(h^2)}$$

второй порядок аппрокс

$$\boxed{L_h^\pm y_i \sim O(h) \quad L_h^0 y_i \sim O(h^2)}$$

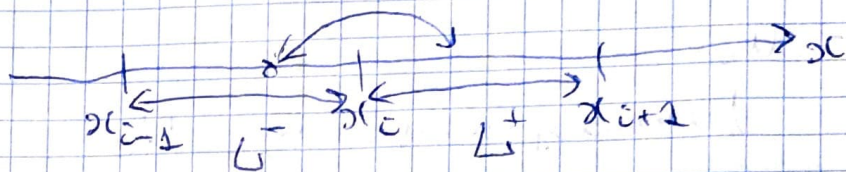
$x, u(x)$ - функции мет. т. по невязке (не гл. из)

x_i, y_i → разн. схема → функции по невязке с нулем



11.2. Вторые производные

$$u''(x) = \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right)$$



$$\begin{aligned} L_h y_i &= \frac{1}{h} (L_h^+ y_i - L_h^- y_i) = \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{h^2} [y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}] \end{aligned}$$

$$u''(x_i) \sim \frac{1}{h^2} [y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}]$$

Поправки $L_h^+ y_i = y_{i,x}$

$$L_h^- y_i = y_{i,\bar{x}}$$

$$L_h^0 y_i = y_{i,\bar{x}}$$

Вторые
производные

$$L_h y_i = (y_{i,x} - y_{i,\bar{x}}) \hat{h} =$$

$$= (y_{i,x})_{\bar{x}} = y_{i,x\bar{x}} =$$

$$= \frac{1}{2} \text{на прав. центре} = y_{i,\bar{x}x}$$

$$\psi_i = \frac{d^2 u}{dx^2}(x_i) - \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))] =$$

$$= u''_i - \frac{1}{h^2} [u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Точная} \\ \text{ошибка} \end{array} \right\} =$$

$$= u''_i - \frac{1}{h^2} \left[u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + \frac{h^3}{6} u'''_i + \frac{h^4}{24} u^{(4)}_i + O(h^5) - \right.$$

$$\left. - 2u_i + u_i - hu'_i + \frac{h^2}{2} u''_i - \frac{h^3}{6} u'''_i + \frac{h^4}{24} u^{(4)}_i + O(h^5) \right] =$$

$$= u''_i - \left[h^2 u''_i + \frac{h^4}{12} u^{(4)}_i + O(h^5) \right] \frac{1}{h^2} = u''_i - u''_i - \frac{h^2}{12} u^{(4)}_i + O(h^3)$$

$$\psi_i = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}_i + O(h^3) = O(h^2)$$

§3. Численное решение задачи Коши для ОДУ.

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = f(x, u(x)) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$u(0) = u_0$$

$f(x, u)$ непрерывн. по u .

1.1. Метод Эйлера

$[0, l]$, выберем сетку $\{x_i\}$: $x_i = x_0 + ih$,
 $x_0 = 0, h = \frac{l}{n}, i = \overline{0, n}$

Выберем некоторую функцию $y_i, i = \overline{0, n}$

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \underbrace{f(x_i, y_i)}_{f_{hi}} & i = \overline{0, n-1} \\ y_0 = u_0 \end{cases} \rightarrow \text{абсолютный метод Эйлера}$$

$$L_h y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = L_h^+ y_i$$

$$f_{hi} = f(x_i, y_i)$$

$$\underline{L_h^+ y_i = f_{hi}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \\ y_0 = u_0 \end{cases}, i = \overline{0, n-1}$$

Зам. Неабсолютный метод:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$\underline{y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1})}$$

(неабсолютные методы, как правило, более устойчивы к ошибкам округления)

$$Z_i = u(x_i) - y_i = u_i - y_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{нагрешность}$$

1) Точность аппроксимации

$$\psi_i = (Lu)_i - L_h u_i$$

$$\varphi_i = \cancel{(f)_i} - \cancel{(f_h)_i} = f(x_i, u_i) - f_h(x_i, u_i)$$

$$\Phi_i = \psi_i - \varphi_i = (Lu)_i - L_h u_i - (f)_i + f_{hi}$$

$$= \underbrace{(Lu)_i - (f)_i}_0 - L_h u_i + f_{hi} =$$

0 (м.а. задана $Lu=f$, азн. u в м. x_i)

$$= -L_h u_i + f_{hi} = \Phi_i$$

$$-\Phi_i = L_h u_i - f_h(u_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(x_i, u_i) =$$

$$\stackrel{\text{с помощью Тейлора в } x_i}{=} (u_i + h u'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + O(h^3) - u_i) \frac{1}{h} - f_i =$$

$$= \underbrace{u'_i - f_i}_0 + \frac{h}{2} u''_i + O(h^2) = \frac{h}{2} u''_i + O(h^2) = O(h)$$

$$u'(x_i) - f(x_i, u_i) = 0 \quad \text{т.к.} \quad u'(x) = f(x, u)$$

Результат: оценка точности имеет порядок аппроксимации. $\Phi_i = O(h)$

2) Точность и ос-во

$$Z_i = u_i - y_i \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad y_0 = u_0 \quad \downarrow \quad Z_0 = 0$$

$$y_i = u_i - Z_i \Rightarrow$$

$$\frac{u_{i+1} - Z_{i+1} - u_i + Z_i}{h} = f(x_i, u_i - Z_i)$$

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = f(x_i, u_i - z_i), \quad i = \overline{0, n-1}$$

$$\underbrace{\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(x_i, u_i)}_{= \Phi_i} - \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = f(x_i, u_i - z_i) - f(x_i, u_i)$$

$$- \Phi_i = L_h u_i - f_{h,i}(u_i)$$

$$- \Phi_i - \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = -[f(x_i, u_i) - f(x_i, u_i - z_i)]$$

Примежем, что p -я $f(x, u)$ имеет
 в u f'_u - ограниченна: $|f'_u| \leq C$
 по т. Лагранжа, $0 < \theta < 1$

$$- \Phi_i - \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = -f'_u(x_i, u_i - \theta z_i) (\pm z_i)$$

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{h} = -\Phi_i + f'_u(x_i, u_i - \theta z_i) \cdot z_i, \quad i = \overline{0, n-1}$$

$z_0 = 0$

$$z_{i+1} = z_i \cdot (1 + h f'_u(x_i, u_i - \theta z_i)) - h \Phi_i$$

$$\Downarrow$$

$$|z_{i+1}| \leq |z_i| |1 + h f'_u| + h |\Phi_i| \leq \{ |f'_u| \leq C \} \leq$$

$$\leq |z_i| (1 + Ch) + h |\Phi_i| \leq \{ |\Phi_i| \leq \|\Phi\| \} \leq$$

$$\leq |z_i| (1 + Ch) + h \|\Phi\| \leq \quad (\|\Phi\| = O(h))$$

$$\leq \{ 1 + Ch \leq e^{Ch} \} \leq$$

$$\leq |z_i| e^{Ch} + h \|\Phi\|, \quad e^{Ch} = q > 1$$

$$|z_{i+1}| \leq |z_i| q + h \|\Phi\|, \quad i = \overline{0, n-1}$$

$$z_0 = 0$$

$$i=1: |z_1| \leq |z_0|q + h\|\Phi\| = h\|\Phi\|$$

$$i=2: |z_2| \leq |z_1|q + h\|\Phi\| \leq q \cdot h\|\Phi\| + h\|\Phi\| = h\|\Phi\|(1+q)$$

$$i=3: |z_3| \leq |z_2|q + h\|\Phi\| \leq \cancel{h\|\Phi\|} h\|\Phi\|(1+q)q + h\|\Phi\| = h\|\Phi\|(1+q+q^2)$$

$$|z_i| \leq h\|\Phi\|(1+q+q^2+\dots+q^{i-1}) \leq \{\forall i\} \leq h\|\Phi\|(1+q+q^2+\dots+q^n)$$

где n — число узлов сетки

$$\|z\|_c \leq h\|\Phi\|(1+q+q^2+\dots+q^n) \leq h\|\Phi\|nq^n$$

$$\|z\|_c \leq \frac{n \cdot h}{2} e^{\frac{ch}{2}n} \|\Phi\| \Rightarrow \|z\|_c \leq l e^{cl} \|\Phi\| = l e^{cl} \cdot O(h) = O(h)$$

$$\|z\|_c \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{неблизко} \quad \text{непогрешен} \quad \text{схема}$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) - \text{обыкновен}$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_{i+1}) - \text{необыкновен}$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{f(x_i, y_{i+1}) + f(x_i, y_i)}{2} - \text{среднее}$$

11.2. Меморизация Леммы Римана

$$u(x_i), u(x_{i+1})$$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \underline{O}(h^3)$$

$$\left\| \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = u'(x_i) + \frac{h}{2} u''(x_i) + \underline{O}(h^2) \right.$$

$$u(x): \quad \underline{u'(x) = f(x, u)}$$

$$u''(x) = (f(x, u))'_x = f'_x + f'_u u'_x =$$

$$= f'_x + f'_u f$$

↓

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = f_i + \frac{h}{2} [f'_{x_i} + f'_{u_i} f_i] + \underline{O}(h^2)$$

Тогда оно уберётся $O(h^2)$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f_i(x_i, y_i) + \frac{h}{2} [f'_x(x_i, y_i) + f'_u(x_i, y_i) \cdot f(x_i, y_i)]$$

$$\bullet f'_x(x_i, y_i) + \frac{h}{2} [f'_x(x_i, y_i) + f'_u(x_i, y_i) \cdot$$

$$f(x_i, y_i)] = \beta \cdot f_i + \alpha f(x_i + \gamma h, y_i + \delta h) + \underline{O}(h^2)$$

⇒ надо найти β, γ, δ

$$(*) = \beta f_i + \alpha [f_i + f'_{x_i} \gamma h + f'_{u_i} \delta h] + \underline{O}(h^2) =$$

$$= (\beta + \alpha) f_i + \alpha h \gamma f'_{x_i} + \alpha h \delta f'_{u_i} + \underline{O}(h^2) =$$

тобы было верно равенство =

$$f_i + \frac{h}{2} [f'_{x_i}(x_i, y_i) + f'_{u_i}(x_i, y_i) \cdot f(x_i, y_i)]$$

$$\beta + \alpha = 1$$

$$\alpha h = \frac{h}{2}$$

$$\alpha \delta h = f_i \cdot \frac{h}{2}$$

$$\beta = 1 - \alpha$$

$$\delta = \frac{f_i}{2\alpha}$$

$$\gamma = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1 - \alpha) f(x_i, y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{f_i h}{2\alpha}\right)$$

$$i = \overline{0, n-1}$$

$$y_0 = u_0$$

метод Рунге-Кутты 2-го порядка

1) $\alpha = 0$:

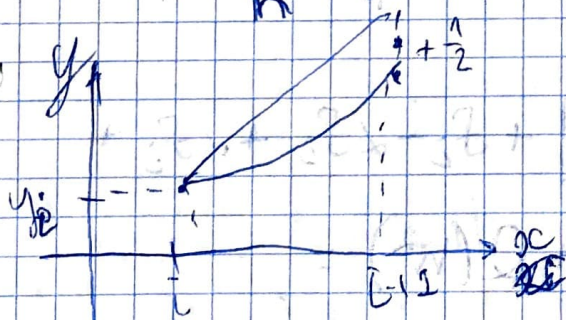
$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f_i \quad \text{— метод Эйлера}$$

2) $\alpha = 1$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{f_i h}{2}\right)$$

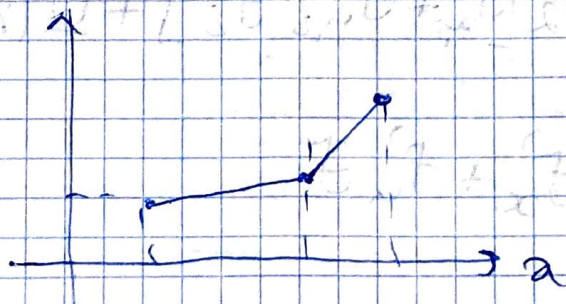
3) $\alpha = \frac{1}{2}$ — метод Рунге-Кутты

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2} f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} f\left(x_i + h, y_i + f_i h\right)$$



$$\frac{dy}{dx} = f$$

$\alpha = 1$



Введем оператор:

$$F(v) = (1-\alpha) f(x_i, h) + \alpha f(x_i + \frac{h}{2\alpha}, v + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, v))$$

Тогда: $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = F(y_i)$

П.3. Точность аппроксимации и оценка метода Р-К.

Аппроксимация

$$\Phi_i = (Lu)_i - L_h u_i - (f)_i + f_{h,i} =$$

$$= \underbrace{(Lu)_i - (f)_i}_{0, \text{ так как } u' = f} - L_h u_i + \underbrace{f_{h,i}}_{(F(u_i))} =$$

$$= - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + (1-\alpha) f(x_i, u_i) + \alpha f(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)) = - \frac{u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + \frac{h^3}{6} u'''_i + O(h^4) - u_i}{h} +$$

$$+ (1-\alpha) \underbrace{f(x_i, u_i)}_{f_i} + \alpha \left[f_i + f'_{x_i} \cdot \frac{h}{2\alpha} + f'_{u_i} \cdot \frac{h}{2\alpha} f_i + O(h^2) \right] =$$

$$= - \left[u'_i + \frac{h}{2} u''_i + \frac{h^2}{6} u'''_i + O(h^3) \right] + f_i - \alpha f_i + \alpha f_i +$$

$$+ \alpha f'_{x_i} \cdot \frac{h}{2\alpha} + \alpha f'_{u_i} \cdot \frac{h}{2\alpha} f_i + O(h^2) =$$

$$= -u'_i - \frac{h}{2} u''_i + f_i + \frac{h}{2} [f'_{x_i} + f'_{u_i} f_i] + O(h^2) \equiv$$

$\text{так как } u' = f(x, u)$

$$u''_{xx} = f'_x + f'_u u'_x = f'_x + f'_u f$$

$$\equiv O(h^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_i = O(h^2)} \rightarrow \forall \alpha \text{ 2 порядка аппроксимации}$$

$$\left\{ \Phi_i = Q(h^2) = -\frac{u_{i+2} - u_i}{h} + F(u_i) \right\}$$

Ex - mb: $z_i = u_i - y_i$

$y_i = u_i - z_i$ итерационно в разностном случае

$$\frac{u_{i+2} - z_{i+2} - u_i + z_i}{h} = F(u_i - z_i)$$

$$\frac{u_{i+2} - u_i}{h} - \frac{z_{i+2} - z_i}{h} = F(u_i - z_i)$$

$$\frac{u_{i+2} - u_i}{h} - F(u_i) - \frac{z_{i+2} - z_i}{h} = F(u_i - z_i) - F(u_i)$$

$$-\Phi_i - \frac{z_{i+2} - z_i}{h} = F(u_i - z_i) - F(u_i) =$$

$$= F'_n(u_i - \theta z_i)(-z_i)$$

~~$z_{i+2} - z_{i+1} = -z_i + h[\Phi_i + F'_n(u_i - \theta z_i)(-z_i)]$~~

$$z_{i+2} = z_i(1 + h F'_n(u_i - \theta z_i)) - h \Phi_i$$

(аналогично можно доказать)

$$z_0 = 0$$

$$|z_{i+2}| \leq |z_i| (1 + h |F'_n(u_i - \theta z_i)|) + h |\Phi_i|$$

$$1) |\Phi_i| \leq \|\Phi\|_C \quad \forall i$$

$$2) F'_n = \{ |f'_u| \leq C \} = (1-\alpha) f'_u + \alpha f'_u (1 + \frac{h}{2\alpha} f'_u) =$$

$$= f'_u + \frac{h}{2} f'_u f'_u \Rightarrow |F'_n| \leq |f'_u| + \frac{h}{2} |f'_u|^2 \leq C + \frac{h}{2} C^2$$

$$|F'_n| \leq C + \frac{h}{2} C^2$$

$$|z_{i+1}| \leq |z_i| \underbrace{\left(1 + Ch + \frac{h^2}{2} C^2\right)}_{\leq e^{Ch}} + h \|\Phi\|_c$$

$$e^{Ch} = q > 1$$

$$|z_{i+1}| \leq |z_i| q + h \|\Phi\|_c \quad \forall i$$

$$|z_i| \leq |z_{i-1}| q + h \|\Phi\|_c$$

$$|z_{i+1}| \leq (|z_{i-1}| q + h \|\Phi\|_c) q + h \|\Phi\|_c \leq$$

$$\leq |z_{i-1}| q^2 + h \|\Phi\|_c (1 + q) \leq$$

$$\leq |z_{i-2}| q^3 + h \|\Phi\|_c (1 + q + q^2) \leq \dots \leq$$

$$\leq \underbrace{|z_0|}_{=0} q^{i+1} + h \|\Phi\|_c (1 + q + \dots + q^i) \leq$$

$$q \geq 1, i \leq n$$

$$\leq h \|\Phi\|_c (1 + q + \dots + q^n) \leq n h q^n \|\Phi\|_c$$

$$|z_{i+1}| \leq n h q^n \|\Phi\|_c \quad \forall i: i+1 \leq n \Rightarrow$$

$$\|z\|_c \leq n h q^n \|\Phi\|_c = \underbrace{e^{chn}}_{\text{const}} \|\Phi\|_c = \underbrace{e^{ch}}_{\text{const}} \|\Phi\|_c = \mathcal{O}(h^2)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1-\alpha) f(x_i, y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, y_i)\right)$$

$$K_1 = f(x_i, y_i), K_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + K_1 \cdot \frac{h}{2\alpha}\right)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1-\alpha) K_1 + \alpha K_2$$

Метод Рунге 4-го порядка аппроксимации:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

$$K_1 = f(x_i, y_i), K_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + K_1 \frac{h}{2}\right),$$

$$K_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + K_2 \frac{h}{2}\right), K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)$$

7.4. Метод Адамса

(для решения задачи метода Эйлера)

$$\frac{du}{dx} = f(x, u(x))$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = u(x_{i+1}) - u(x_i)$$

$$u(0) = u_0, \quad 0 < x < l$$



$$F(x): F(x_j) = f(x_j), \quad j = i-m, \dots, i$$

$m+1$ точек

$$F(x) = P_m(x) = \sum_{j=i-m}^i f_j Q_{mj}(x)$$

$$Q_{mj}(x) = \prod_{\substack{k=i-m \\ k \neq j}}^i \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) \approx \sum_{j=i-m}^i f_j \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_{mj}(x) dx$$

$$y_{i+1} - y_i = \sum_{j=i-m}^i f_j a_j, \quad a_j = \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_{mj}(x) dx$$

$y_0 = u_0$ и y_{i-m}, y_m — известны на первом шаге метода

1) Функция "разностная группа" $\ominus$

2) $[x_i, x_{i+1}]$, а точки берём вне отрезка?

3) $m+1$ шагов метод

(зачем это?)

① $m=0$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) - \text{метод Эйлера}$$

$$(P_0(x) \text{ по } x_i: P_0(x) = f_i)$$

② $m=1$ — **бисплайн**

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx$$

$$P_1(x) : f$$

x_i, x_{i+1}

$$P_1(x) = f_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + f_{i-1} \frac{x - x_{i+1}}{x_{i-1} - x_{i+1}}$$

~~$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i \frac{x - x_{i-1}}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{i-1} \frac{x - x_{i+1}}{-h} dx$$~~

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i \frac{x - x_{i-1}}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{i-1} \frac{x - x_{i+1}}{-h} dx =$$

$$= f_i \cdot \frac{1}{h} \left. \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} \right|_{x_i}^{x_{i+1}} - f_{i-1} \cdot \frac{1}{h} \left. \frac{(x - x_{i+1})^2}{2} \right|_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= f_i \frac{1}{h} \left[\frac{(x_{i+1} - x_{i-1})^2}{2} - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} \right] -$$

$$- f_{i-1} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{2} = f_i \cdot \frac{1}{h} \left[\frac{4h^2}{2} - \frac{h^2}{2} \right] -$$

$$- f_{i-1} \frac{h}{2} = \frac{3}{2} h f_i - \frac{1}{2} h f_{i-1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{3}{2} f_i - \frac{1}{2} f_{i-1} & (\text{аппрокс. коэф. год. равна } 1) \\ y_0 = u_0, y_2 = ? \end{cases}$$

Попр. шаг.

$$\begin{aligned} -\Phi_i &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{3}{2} f_i + \frac{1}{2} f(x_{i-1}, u_{i-1}) = \\ &= \frac{u_i + h u'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + O(h^3) - u_i}{h} - \frac{3}{2} u'_i + \frac{1}{2} u'_{i-1} = \\ &= u'_i + \frac{h}{2} u''_i - \frac{3}{2} u'_i + \frac{1}{2} [u'_i + u''_i (-h)] + O(h^2) = \\ &= u'_i + \frac{h}{2} u''_i - \frac{3}{2} u'_i + \frac{1}{2} u'_i - \frac{h}{2} u''_i + O(h^2) = O(h^2) \\ \Rightarrow \Phi_i &= O(h^2) \end{aligned}$$

1) Зау.: сх-мо имеет второй порядок

2) $m=1$ порядок - 2

$m=2 \rightarrow 3$

$\vdots$

$m=n \rightarrow n+1$

3) Каждое значение f вычисляется один раз

4) Кусочно разностная процедура

5) Ф-цию f можно интерполировать

по точкам $\underbrace{x_{i-m}, \dots, x_i}_{\text{явная схема}}, x_{i+1}$
неявная схема

§4. Численное решение краевых задач для ОДУ 2-го порядка

Пусть $u(x)$ задана на $[0, l]$

$$\begin{cases} u''(x) - q(x)u(x) = -f(x) \\ u(0) = u_0, \quad u(l) = u_1 \end{cases} \quad 0 < x < l$$

Эта задача имеет экв. реш., если $q(x), f(x)$ — непрерывны и $q(x) \geq q_0 > 0$

П.1. Разностная схема

На отрезке $[0, l]$ введем сетку:

$$x_i = ih; \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad h = \frac{l}{N}$$

$$y_i; \quad i = 0, 1, \dots, N$$

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q(x_i)y_i = -f(x_i) & i = 1, \dots, N-1 \\ y_0 = u_0, \quad y_N = u_1 \end{cases}$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2 q_i y_i = -h^2 f_i$$

$$y_{i+1} - (2 + h^2 q_i) y_i + y_{i-1} = -h^2 f_i$$

$$y_0 = u_0; \quad y_N = u_1$$

СЛАУ (*)

1) СЛАУ: $(N+1) \times (N+1)$

$$\begin{matrix} i=0 \\ i=1 \\ i=2 \\ \vdots \\ i=N \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -(2+h^2 q_1) & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -(2+h^2 q_2) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(2+h^2 q_3) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ -f_1 h^2 \\ -f_2 h^2 \\ -f_3 h^2 \\ \vdots \\ u_1 \end{pmatrix} = A$$

2) A - трехдиагональная

3) A - симметрична без крайних условий (первая и последняя строки)

4) в i -ой строке $i = 1, \dots, N-1$

$$a_{ii} = -(2 + h^2 q_i), \quad a_{i,i-1} = 1 = a_{i,i+1}$$

$$|a_{ii}| = |2 + h^2 q_i| > 1 + 1, \text{ в силу того, что } q_i \geq q_0 > 0$$

$\Rightarrow A$ имеет гарантированное преобладание

!!! 5) Из 4) $\Rightarrow$ СЛАУ имеет и ег. реш.

!!! 6) Метод трехточечной прогонки:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i; \quad i = 1, \dots, N-1 \\ y_0 = \alpha_0 y_1 + q_0 \\ y_N = \alpha_1 y_{N-1} + q_1 \end{cases}$$

$$\boxed{A_i = B_i = 1; \quad C_i = 2 + h^2 q_i; \quad F_i = +f_i h^2}$$

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0; \quad q_0 = u_0; \quad q_1 = u_1$$

Для каких условий метод прогонки корректен и устойчив?

$$a) |C_i| \geq |A_i| + |B_i| \quad \oplus$$

$$b) |\alpha_0| \leq 1, |\alpha_1| \leq 1, |\alpha_0| + |\alpha_1| < 2 \quad \oplus$$

П.2. Аппроксимация, ~~эквивалентная~~ Cr-мб.

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i = -f_i$$

$$\Phi_i = \underbrace{(Lu)_i - L_h u_i}_{\Psi_i} - \underbrace{(f)_i}_{f(x_i)} + \underbrace{f_i}_{\text{аппрокс. } f(x_i)} \quad \ominus$$

$$\textcircled{=} \cancel{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}} u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \underbrace{f(x_i) + f(x_{i+1})}_{q_i} -$$

$$\underbrace{-q_i u_i + q_i u_i}_{''0} = u_i'' - \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{12} h^2 u_i^{(4)} + O(h^3) =$$

$$= O(h^2)$$

Cx-mo:

$$z_i = u_i - y_i, \quad y_i = u_i - z_i$$

Регуляризатор и разностную схему.

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} - q_i u_i + q_i z_i = f_i$$

$$\underbrace{\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - q_i u_i + f_i}_{L_h u_i - q_i u_i + f_i} - \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} + q_i z_i = 0$$

$$L_h u_i - q_i u_i + f_i = \Phi_i$$

$$\frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} - q_i z_i - \Phi_i = 0$$

$$z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1} - h^2 q_i z_i - h^2 \Phi_i = 0$$

$$z_i (-2 - q_i h^2) = -z_{i+1} - z_{i-1} + h^2 \Phi_i$$

$$(2 + q_i h^2) z_i = z_{i+1} + z_{i-1} - h^2 \Phi_i \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$z_0 = y_0 - u_0 = 0, \quad z_N = 0$$

$$\|z\|_c = \max_i |z_i| = |z_{i_0}|$$

Где $i = i_0 \Rightarrow$ номер наименьшего

$$|z_i| \leq \|z\|_c, \quad |\Phi_i| \leq \|\Phi\|_c$$

$$|2 + q_i h^2| |z_i| \leq |z_{i+1}| + |z_{i-1}| + h^2 \|\Phi\|_c \leq 2\|z\|_c + h^2 \|\Phi\|_c$$

$$|2 + q_i h^2| |z_i| \leq 2\|z\|_c + h^2 \|\Phi\|_c \quad ; \quad i = 1, \dots, N-1$$

Применяю у нпр $i = i_0$

$$|2 + q_{i_0} h^2| \|z\|_c \leq 2\|z\|_c + h^2 \|\Phi\|_c \Rightarrow$$

$$\|z\|_c \leq \frac{1}{q_{i_0}} \|\Phi\|_c = O(h^2) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

11.3. Задача на собственное значение
(Минимума-максимума)

$$Lu = u'', \quad (u, v) = \int_0^l u v dx, \quad u(0) = u(l) = 0 \\ v(0) = v(l) = 0$$

$$L > 0 : (Lu, u) > 0$$

$$\int_0^l u'' u dx = \underbrace{u' u \Big|_0^l}_0 - \underbrace{\int_0^l u' u' dx}_{< 0}$$

Стандартная задача:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, & 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

$$k^2 + \lambda = 0, \quad k^2 = -\lambda, \quad k = \pm \sqrt{-\lambda}$$

$$1) \lambda = 0 \Rightarrow u(x) = Ax + B; \quad u(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ u(l) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$2) \lambda < 0 \Rightarrow u = A e^{\sqrt{-\lambda} x} + B e^{-\sqrt{-\lambda} x}$$

$$u(0) = A + B = 0$$

$$u(l) = A e^{\sqrt{-\lambda} l} + B e^{-\sqrt{-\lambda} l} = 0 \Rightarrow A = 0, B = 0$$

$$3) \lambda > 0 \Rightarrow k = \pm i \sqrt{\lambda}$$

$$u = A \sin(\sqrt{\lambda} x) + B \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

$$u(0) = B \underbrace{\cos 0}_1 = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$u(l) = A \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

$$\sin(\sqrt{\lambda} l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$u_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Задача Задания:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \lambda y_i = 0, & i = 1, \dots, N-1 \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases}$$

$$y_{i+1} - (2 - \lambda h^2) y_i + y_{i-1} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$y_i = \sin(\alpha x_i)$$

$$\sin(\alpha(x_i + h)) - (2 - \lambda h^2) \sin \alpha x_i + \sin(\alpha(x_i - h)) = 0$$

$$2 \sin(\alpha x_i) \cos \alpha h - (2 - \lambda h^2) \sin(\alpha x_i) = 0$$

$$\sin \alpha x_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$2 \cos \alpha h - 2 + \lambda h^2 = 0$$

$$\lambda h^2 = 2(1 - \cos \alpha h) = 4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2}$$

$$\lambda = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha h}{2}$$

$$y_0 = 0 = \sin(\alpha \cdot 0) = 0$$

$$y_N = 0 = \sin(\alpha x_N) \Rightarrow \sin \alpha l = 0 \Rightarrow \alpha l = \pi n$$

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n=1, \dots, N-1$$

Собств. значения:

$$\lambda_n = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi n h}{2l} \quad ; \quad n=1, \dots, N-1$$

$$y_{ji}^{(n)} = \sin \frac{\pi n x_i}{l}$$

Замечания:

1) Грани: групп-но уравне с разностными

$u_n(x)$ - диск. функ

$y_{ji}^{(n)} \rightarrow$ непрерывное функ

2) Диск-а значения:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \quad ; \quad n=1, 2, \dots$$

3) Разностные уравн:

$$\lambda_n = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi n h}{2l} \quad ; \quad n=1, 2, \dots, N-1$$

$$4) \lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi (N-1)h}{2l}$$

$\lambda_{\min}$

$\lambda_{\max}$

$$\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\pi h}{2l}}{\frac{\pi^2 h^2}{(2l)^2}} \cdot \frac{4}{h^2} = \frac{\pi^2}{l^2} = \text{сб. функ}$$

λ_1 -групп
значен

$$5) \lambda_{\max} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi (N-1)h}{2l} - \frac{\pi h}{2l} \right) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi h}{2l} \right) =$$

$$= \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{4}{h^2} \sim \frac{4}{l^2} h^2 \xrightarrow[h \rightarrow 0]{h \rightarrow \infty} \infty$$

Спектральная норма

$$A\vec{x} = \vec{f}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Найдем число обус. A

$$M_A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$a) A = A^* \Rightarrow \|A\| = \max_i |\lambda_i|$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 3 = \lambda_{\max}$$

$$M_A = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} = 3$$

$$b) \|A\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\|A\vec{x}\|_{L_2}^2 = (2x_1 + x_2)^2 + (x_1 + 2x_2)^2 = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 \rightarrow \max_{\|\vec{x}\|=1}$$

$$+ x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 \rightarrow \max_{\|\vec{x}\|=1}$$

$$\begin{cases} F = \|A\vec{x}\|^2 = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = 5 + 8x_1x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$I. x_1 = \pm x_2$$

$$x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\max f(x) = 5 + 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5 + \frac{8}{2} = 9$$

$$\|Ax\|^2 = 9 \Rightarrow \|A\| = 3$$

$$\|A^{-1}\| \Rightarrow \|A^{-1}\|$$

$$II. \psi = 5 + 8x_1x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\psi'_{x_1} = 8x_2 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$\psi'_{x_2} = 8x_1 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

$$\text{Подставляем } x_1 = \pm x_2 \text{ в } x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi''_{x_1x_1} = 2\lambda, \psi''_{x_1x_2} = 8, \psi''_{x_2x_2} = 2\lambda$$

$$d^2\psi = 2\lambda dx_1^2 + 8dx_1dx_2 + 2\lambda dx_2^2 = 4\lambda dx_1^2 + 8dx_2^2$$

$$2dx_1 + 2dx_2 = 0 \Rightarrow dx_1 = -dx_2$$

2) Матрица Гессе с вектором н. а. м.

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Итерационный метод

- I. { Объясните применимость МПН
Найти τ_0 - оптимальный шаг
Сделать две итерации с $\vec{x}^{(0)} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{с 1 примера})$$

a) $A = A^* > 0 : \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 > 0 \Rightarrow A > 0$

$$\begin{aligned} (A\vec{x}, \vec{x}) &= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 = 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \\ &= \frac{2}{x_2} \left(\underbrace{\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \frac{x_1}{x_2} + 1}_{\geq 0} \right) > 0 \end{aligned}$$

b) $\tau_0 = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\vec{x}^{(k+2)} - \vec{x}^{(k)} + A\vec{x}^{(k)} = \vec{f}$$

$$\vec{x}^{(k+2)} = \vec{x}^{(k)} - \tau A\vec{x}^{(k)} + \vec{f} \tau$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+2)} = x_1^{(k)} - \tau (2x_1^{(k)} + x_2^{(k)}) + 2\tau \\ x_2^{(k+2)} = x_2^{(k)} - \tau (x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)}) + \tau \end{cases} \quad x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$$

- II. { Объясн. почему применимость Зейделя
2 умнож. Зейделя

$$\begin{cases} 2x_1^{(k+2)} + x_2^{(k)} = 2 \\ x_1^{(k+2)} + 2x_2^{(k+2)} = 1 \end{cases} \quad x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$$

4) Построить $P_2(x)$ для $y = \frac{1}{1+x^2}$ на отрезке $[0, 1]$ с узлами $x_0=0, x_1=\frac{1}{2}, x_2=1$

Вычислить $P_2(\frac{2}{3})$ и сравнить с $y(\frac{2}{3})$ и сравнить с теор. оценкой

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{4}{5}, \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = -2(x-\frac{1}{2})(x-1) - \frac{16}{5}x(x-1) +$$

$$+ x(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow P_2(\frac{2}{3})$$

$$R_n = \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-\frac{1}{2})(x-1)x \leq \frac{M}{6} x(x-\frac{1}{2})(x-1) \Big|_{x=\frac{2}{3}}$$

5) Метод наименьших квадратов

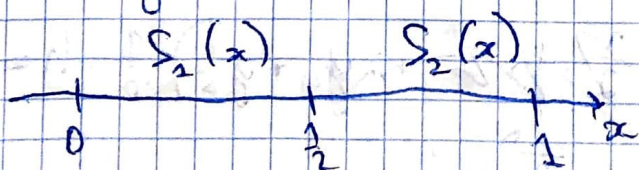
$$x_0=0, \quad x_1=\frac{1}{2}, \quad x_2=1 \quad [0, 1]$$

$$y=x^2$$

$$\langle y \rangle = ax + b$$

6) Числы

$$y = \frac{1}{1+x} \quad [0, 1], \quad x_0=0, \quad x_1=\frac{1}{2}, \quad x_2=1$$



$$S_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + \frac{d_1}{6}x^3 = a_1 + b_1(x-x_1) + c_1 \frac{(x-x_1)^2}{2} + d_1 \frac{(x-x_1)^3}{6}$$

$$S_2(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3$$

$$y_0 = 1 \quad ; \quad y_1 = \frac{2}{3} \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} : S(x) : a_2 + \frac{b_2}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{d_2}{8} = a_2 + \frac{b_2}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{d_2}{8}$$

$$S'(x) : b_2 + 2c_2 \frac{1}{2} + 3d_2 \frac{1}{4} = b_2 + 2c_2 \frac{1}{2} + 3d_2 \frac{1}{4}$$

$$S''(x) :$$

$$S_1(0) = a_1 = y_1 = 1$$

$$S_1\left(\frac{1}{2}\right) = a_1 + b_1 \frac{1}{2} + c_1 \frac{1}{4} + d_1 \frac{1}{8} = \frac{2}{3}$$

$$S_2(1) = \dots$$

$$S_1'(0) = 0$$

$$S_2'(1) = 0$$

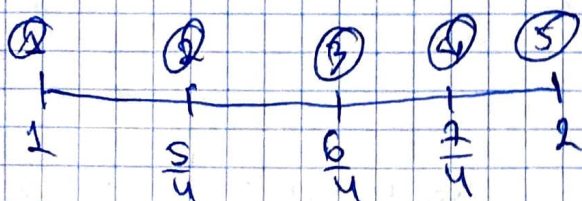
А) Исчисление чисел на многоугольнике

$$a) \int_1^2 \frac{dx}{x} \quad \text{с шагом} \quad h = \frac{1}{4}$$

б) Деление на подинтервалы

в) Сравнение с табл. значений

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 = 0.69314$$



$$I \approx (y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cancel{2y_4} + 2y_5) \frac{1}{2} \cdot h =$$

$$= \left(1 + 2 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{4}{6} + 2 \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{8} =$$

$$= \left(1 + \frac{8}{5} + \frac{8}{6} + \frac{8}{7} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{8} = \frac{1}{8 \cdot 210} (210 + 8 \cdot 42 +$$

$$+ 8 \cdot 35 + 105 \cancel{7} + 8 \cdot 30) = \frac{1}{1680} (210 + 336 + 280 + 105 + 240)$$

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12} u''$$

вспомогат. бм. разб. узел max на $[1,2]$

8) Промежуток умножения на memory Sayce

$$I = \int_{-2}^2 \frac{dx}{x} \quad h=2$$

$$a) \int_{-2}^2 f dx$$

$$[1,2] \rightarrow [-2,1]$$

$$t = Ax + B = 2x - 3$$

$$\begin{cases} -1 = A + B \\ 1 = 2A + B \end{cases} \quad \begin{matrix} A = 2 \\ B = -3 \end{matrix}$$

$$x = \frac{t+3}{2}$$

$$I = \int_{-2}^2 \frac{dx}{x} = \int_{-2}^1 \frac{1}{\frac{t+3}{2}} \cdot \frac{dt}{2} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t+3}$$

б) Найти корни на промежутке

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2-1)^n)$$

$$b) I \approx f(x_1)C_1 + f(x_2)C_2 \quad \text{при } n=2 \quad \text{коэф.} = 1$$

$$C_1 = \int_{-2}^2 \frac{x-x_2}{x_1-x_2} dx = \int_{-2}^2 \frac{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-2}^2 \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2}{2} \Big|_{-2}^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{(+1-\frac{1}{\sqrt{3}})^2}{2} - \frac{(-2-\frac{1}{\sqrt{3}})^2}{2} \right]$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} - \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \right) \right] = -\frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{4}{\sqrt{3}} \right) = 1$$

$$C_2 = -1(-) = 1$$

$$f = \frac{1}{x+3}$$

$$I \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3-\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{3+\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$9) \begin{cases} u' = -\frac{x}{u+x} \\ 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Задача нахождение Φ -к при $x=1$
 u на шаг $h=0.1$

Сделаем шаг u на

$$f = -\frac{x}{u+x}$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hf_i}{2}\right)$$

$$h=0.1$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left[-\frac{x_i + \frac{h}{2}}{x_i + \frac{h}{2} + y_i + \frac{hf_i}{2}} \right]$$

$$y_{i+1} = y_i + 0.1 \left[\frac{x_i + 0.05}{x_i + 0.05 + y_i + 0.05 \frac{x_i}{y_i + x_i}} \right]$$

10) Метод наименьших квадратов (линейное приближение)

$$f(x) = x^3, [0, 1], x_0 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$$

$$y = a + bx$$

$$J = \sum_{i=0}^2 [f(x_i) - (a + bx_i)]^2 \quad (n=2)$$

$$\begin{aligned} J(a, b) &= [x_0^3 - (a + bx_0)]^2 + [x_1^3 - (a + bx_1)]^2 + \\ &+ [x_2^3 - (a + bx_2)]^2 = \{ \text{выберем } x_0, x_1, x_2 \} = \\ &= [-a]^2 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(a + b \frac{1}{2}\right) \right]^2 + [1 - (a + b \cdot 1)]^2 = \\ &= a^2 + \left[\frac{1}{8} - \left(a + \frac{1}{2}b\right) \right]^2 + [1 - (a + b)]^2 = J(a, b) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 6a + 3b - \frac{9}{4}$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = 3a + \frac{5}{2}b - \frac{17}{8}$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0$$

$$\begin{cases} 6a + 3b - \frac{9}{4} = 0 \\ 3a + \frac{5}{2}b - \frac{17}{8} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} a = -\frac{1}{8} \\ b = 1 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{8} + x$$